

AVANT - PROPOS

Le problème de la détermination théorique des oscillations libres (« seiches ») d'une masse d'eau remonte au moins au début du siècle dernier, et à ces premiers essais de théorie s'attachent les noms de J. J. LAGRANGE, R. MERIAN et G. B. AIRY. Il faudra cependant attendre jusque vers 1900 pour voir apparaître des travaux systématiques de mathématiciens, où sont envisagés des lacs de formes variées, de largeur et de profondeur variables. Malheureusement, les solutions des équations auxquelles les auteurs sont conduits sont en général beaucoup trop compliquées pour se prêter commodément à des applications numériques. Aussi, lorsque la connaissance expérimentale des lacs eut fait quelques progrès, lorsque les observations se généralisèrent et qu'on voulut appliquer les résultats accumulés par les théoriciens à la recherche des périodes et des types d'oscillations libres des masses d'eau naturelles, telles que les lacs, les golfes et les mers, fut-on forcé de mettre au point des méthodes approchées de solution, adaptables à des masses d'eau de forme pratiquement quelconque; ce fut l'œuvre de quelques auteurs du début de ce siècle, encore que les dernières en date remontent aux années 1940-1950 seulement.

Toutes ces méthodes seront décrites et étudiées en détail dans ce travail.

Chose assez surprenante, alors que les théoriciens avaient bien envisagé (assez timidement il est vrai) l'étude du mouvement d'oscillation à deux dimensions horizontales, et seulement dans des cas très simples, nous n'avons trouvé nulle part trace de méthodes numériques permettant d'attaquer ce problème pour des masses d'eau naturelles ni même d'essai de théorie : autrement dit, si le problème des seiches « longitudinales » a fait l'objet de nombreux travaux mathématiques, celui des seiches « transversales » semble ignoré des théoriciens. Le phénomène n'est cependant pas inconnu : dès la fin du siècle dernier, F. A. FOREL avait repéré l'existence de seiches transversales dans le lac de Genève et déterminé leurs périodes d'oscillation.

Vers la même époque, d'autres auteurs en avaient observé dans le lac de Constance et quelques autres lacs alpins.

Dans le présent travail, nous présentons une théorie assez détaillée du phénomène, ainsi que deux méthodes numériques permettant l'étude des lacs de forme quelconque. On reviendra plus loin sur ces points.

Etant donné ainsi le caractère « double » du problème des seiches, les deux types d'oscillations, longitudinales et transversales, étant irréductibles l'un à l'autre, le plan du travail se trouve tout naturellement tracé.

La première partie est consacrée à l'étude des seiches longitudinales.

Après avoir passé en revue, dans l'introduction, un certain nombre de questions préliminaires (théories anciennes, causes, méthodes d'observation), nous passons, au premier chapitre, à l'exposé de la théorie générale, suivi de la discussion de l'équation différentielle de G. CHRYSTAL, qui est capitale pour l'étude des seiches longitudinales. On s'est notamment efforcé de compléter quelques points de théorie relatifs à cette équation, et de faire un relevé complet de tous les cas où elle admet des solutions exactes, avec les discussions et les mises au point de détail qui s'imposaient.

Le deuxième chapitre est consacré à l'examen des méthodes de solution approchée de l'équation de G. CHRYSTAL. Parmi celles-ci, il faut surtout retenir la méthode variationnelle de W. RITZ, encore qu'elle soit laborieuse et fournisse des résultats médiocres dès qu'on s'intéresse aux modes d'oscillation supérieurs; la méthode d'existence de A. DEFANT, qui est le procédé de solution par excellence, relativement rapide et très précis; la méthode d'impédance de G. NEUMANN, de conception très moderne, qui introduit en hydrodynamique la notion d'impédance telle qu'elle est utilisée en électricité et en acoustique, permettant ainsi d'étudier l'influence des étranglements sur les seiches longitudinales d'un lac très long (tel que le Tanganika). Les autres méthodes sont de moindre intérêt et d'emploi beaucoup moins commode.

Avant d'appliquer ces divers procédés à l'étude des seiches du Tanganika, objet principal de ce travail, il était indiqué d'en expérimenter la valeur pratique sur un lac dont les seiches sont déjà bien connues par l'observation; le lac de Genève paraissait convenir le mieux à ce rôle de lac-témoin, et ce sont ses seiches longitudinales que nous calculerons donc dans le troisième chapitre. Après avoir dressé des tables de données géographiques et bathymétriques, nous étudions successivement par la méthode de DEFANT et une formule simplifiée les deux premiers modes longitudinaux de ce lac; les résultats présentent un accord entièrement satisfaisant avec les données expérimentales. Signalons également une méthode de vérification des résultats, fondée sur la propriété d'orthogonalité généralisée que possèdent les fonctions propres définies par l'équation de G. CHRYSTAL, que nous avons appliquée ici, et que les auteurs modernes s'occupant de ces questions ignorent régulièrement. Des courbes et graphiques complètent et illustrent ces premiers résultats numériques.

Le chapitre quatrième est consacré aux seiches longitudinales du Tanganika, mais considéré comme oscillant dans son entièreté, comme une seule masse d'eau. Les calculs sont conduits comme pour le lac de Genève, à part que l'on a également utilisé, à titre d'essai, la méthode de W. RITZ, ainsi qu'un procédé fondé sur la transformation de l'équation de CHRYSTAL en une équation intégrale, et que les modes calculés sont au nombre de trois, au lieu de deux.

Comme ci-dessus, tous ces résultats sont illustrés par des graphiques.

Les données expérimentales faisant encore complètement défaut pour ce lac, aucune comparaison avec l'observation n'est évidemment possible.

Le chapitre cinquième concerne l'application de la méthode d'impédance de NEUMANN; celle-ci ne pouvait cependant se faire sans les calculs préalables qui constituent le chapitre IV. La conclusion est que l'influence des deux étranglements considérés est très faible et que si des seiches partielles peuvent affecter tel ou tel bassin du Tanganika, il faut en tout cas s'attendre à observer d'importantes seiches globales. C'est dans ce chapitre également que l'on trouvera l'étude des seiches de la baie de Burton (au nord-ouest du lac).

La seconde partie traite du problème des seiches transversales (parfois appelées dans ce travail, mais improprement, « latérales »). Ainsi qu'il a été dit plus haut, aucune théorie de la question n'avait été faite jusqu'à présent.

Dans le premier chapitre, nous présentons une théorie générale du phénomène. Des seiches transversales ne peuvent apparaître que dans les parties « renflées » des lacs, et leur amplitude décroît exponentiellement à mesure que l'on s'éloigne de ces renflements; c'est ce qui résulte de la discussion de l'équation différentielle du type de STURM-LIOUVILLE que l'on est conduit à écrire. Nous avons pu repérer plusieurs cas où cette équation admet des solutions exactes (des exemples numériques sont traités) et nous proposons plusieurs méthodes approchées pour d'autres cas. Parmi celles-ci, relevons plus particulièrement deux méthodes numériques, illustrées par divers exemples. La première consiste à résoudre par points, à l'aide de formules de différences finies, l'équation de STURM-LIOUVILLE. La seconde est de caractère plus empirique; elle se fonde sur l'extension à deux dimensions de l'équation de CHRYSTAL et sur le passage, dans l'équation ainsi généralisée, à des systèmes de coordonnées curvilignes, tracées au juger.

Malgré son aspect un peu rudimentaire, cette méthode est d'une stabilité remarquable, comme l'illustre son application (délibérément peu précise) à des cas dont la solution exacte est connue par ailleurs. Elle complète la première méthode et la présuppose, le repérage des zones où les seiches transversales seront observables n'étant possible que par celle-ci. Tout comme dans la première partie de ce travail, le lac de Genève sera utilisé ici comme moyen de vérification de la valeur pratique des méthodes proposées.

Le deuxième chapitre contient l'ensemble des calculs relatifs aux seiches transversales de ce lac : recherche des zones où elles peuvent apparaître, tables de données numériques, calculs proprement dits, limités aux régions de Rolle-Thonon et Morges-Evian, par les deux méthodes numériques décrites. Celle des coordonnées curvilignes s'avère supérieure à la première, à en juger par la comparaison des résultats théoriques avec les données de l'observation.

Les mêmes méthodes sont ensuite appliquées au lac Tanganika, pour lequel, ainsi qu'il a été dit, on ne dispose encore d'aucune donnée expérimentale. La

théorie prévoit l'apparition de seiches transversales en quatre régions principales : Nyanza, Albertville, Moba et Kala. L'accord entre les résultats obtenus par les deux procédés est en général très bon. Ce chapitre troisième, comme du reste le précédent, est abondamment illustré de cartes et de courbes.

Dans le dernier chapitre enfin se trouvent rassemblées diverses questions spéciales de seiches transversales : seiches balayant latéralement un rivage en pente douce, « seiches » sur les hauts-fonds en pleine mer, seiches dans les détroits. Certaines de ces questions avaient déjà été traitées par différents auteurs; on s'est efforcé ici de compléter ces théories et l'on a traité quelques nouveaux cas (notamment la seiche balayant un rivage plan incliné et la « seiche » sur un haut-fond parabolique). On a pu appliquer certains résultats théoriques au lac Tanganika et calculer ainsi quelques périodes d'oscillation transversale pour l'extrémité nord du lac; l'application de ce procédé s'est malheureusement avérée impossible pour le lac de Genève.

Une bibliographie, probablement complète jusqu'à l'année 1954, termine le travail.

Nous adressons nos plus sincères remerciements à M. C. MANNEBACK, professeur à l'Université catholique de Louvain, qui nous a proposé ce sujet de thèse original et n'a cessé durant deux ans de nous guider de ses précieux conseils sur les ouvrages à consulter, les idées à développer et les méthodes à utiliser. Nous remercions également M. L. P. BOUCKAERT, professeur à la même université, pour toutes les indications qu'il nous a données, principalement au début de notre travail.

Il nous est agréable d'exprimer la gratitude qui est due à M. V. VAN STRAELEN, président du Comité de coordination des Recherches hydrobiologiques au lac Tanganika et à M. E. LELOUP, directeur a.i. de l'Institut royal des Sciences naturelles de Belgique, chef de la mission qui opéra au cours des années 1946-1947. Ils nous ont encouragé et assuré la publication de notre travail, fondé sur des observations recueillies par cette mission, dans les mémoires consacrés à ses résultats.

Il nous reste enfin à remercier l'Institut pour l'Encouragement de la Recherche scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture (I.R.S.I.A.) de nous avoir subsidié pendant deux ans en vue de cette recherche, tout en nous autorisant à employer sa machine à calculer électronique.

ÉTUDE THÉORIQUE
DES
OSCILLATIONS LIBRES (SEICHES)
DU LAC TANGANIKA

INTRODUCTION

Sous l'influence d'actions mécaniques diverses, une masse d'eau peut subir une dénivellation temporaire, rapide, d'impulsion assez prompte pour donner lieu à une série d'oscillations du niveau de l'eau autour de sa position d'équilibre; ces oscillations stationnaires libres, quand elles affectent l'ensemble d'une masse d'eau naturelle, fermée ou non, sont appelées *seiches*.

Les premières observations du phénomène remontent au moins au XVI^e siècle et eurent lieu, semble-t-il, sur les bords du lac de Constance et surtout sur les bords du lac Léman.

En tout cas, dès le XVIII^e siècle (et peut-être avant), les riverains de ce dernier lac, et particulièrement les habitants de Genève, devaient considérer comme un phénomène plus ou moins familier le mouvement alternatif d'élévation et d'abaissement des eaux de leur lac, sorte de marée en miniature à période très rapide (de l'ordre de l'heure ou de la demi-heure), et le désignaient sous le nom de *seiches*.

Le terme est attesté dès le début du XVIII^e siècle, date des premières observations d'allure scientifique que l'on en possède.

On pourra lire certaines de ces anciennes descriptions dans la grande monographie du lac Léman de F. A. FOREL ⁽¹⁾, dont il sera librement fait usage dans cette introduction.

⁽¹⁾ FOREL, F. A., *Le Léman, Monographie limnologique*, 2 vol., Lausanne, 1895; la VI^e partie, t. II, pp. 1-288, est consacrée presque entièrement aux *seiches*.

Le phénomène, d'abord considéré comme propre au Léman, fut bientôt observé dans de nombreux autres lacs. Naturellement, les interprétations fantaisistes ne manquèrent pas (on en trouvera d'assez curieuses citées par F. A. FOREL) ⁽²⁾, mais l'on peut dire que vers 1860, les auteurs sont unanimes à reconnaître dans les seiches des oscillations stationnaires libres affectant l'ensemble de la masse d'eau.

La théorie mathématique de ce genre de phénomènes avait cependant déjà fait l'objet de recherches importantes bien avant cette date. Il faut citer notamment J. J. LAGRANGE (1781), J. R. MERIAN (1828) et G. B. AIRY (1845).

Premières théories. (Aperçu sommaire). — Dans ce qui suit, à moins que le contraire ne soit expressément spécifié, il s'agira exclusivement de masses d'eau fermées, autrement dit, de lacs; les masses d'eau ouvertes (baies, golfes, criques) seront traitées à part.

Dès 1781, J. J. LAGRANGE ⁽³⁾ s'était occupé de la théorie des ondes de « grande longueur » (c.à.d. de longueur telle que la profondeur du bassin est négligeable devant celle-ci) se propageant dans un canal; pour le cas de la profondeur uniforme h_0 , il avait trouvé que leur vitesse de propagation était égale à $\sqrt{gh_0}$.

En 1828, J. R. MERIAN ⁽⁴⁾ reprit le problème des oscillations libres (à une et ensuite à deux dimensions horizontales) dans un bassin rectangulaire de profondeur constante; à l'aide de considérations assez simples, il établit la formule donnant correctement les périodes des seiches à un, deux... k nœuds dans un tel bassin (cf. p. 31).

Plus tard, sa formule fut utilisée comme une approximation commode des périodes des seiches dans des lacs de profondeur variable et de forme quelconque « allongée ». Cette formule sous laquelle nous aurons l'occasion de revenir plus loin, s'écrit

$$T_k = \frac{2l}{k\sqrt{gh_0}},$$

T_k désignant la période de la seiche à k nœuds, l la « longueur » du bassin (c.à.d. la dimension selon laquelle ont lieu les oscillations considérées), h_0 sa profondeur constante et g l'accélération due à la pesanteur. Conformément à l'usage établi, elle sera désignée dans ce travail sous le nom de « formule de MERIAN ».

Si l'on veut en faire usage pour calculer l'ordre de grandeur des périodes d'un lac de profondeur variable et de contour non rectangulaire (ce qui est parfois utile à titre de vérification), on y remplace l par la longueur mesurée le long

⁽²⁾ *Op. cit.*, II, pp. 47 sqq.

⁽³⁾ LAGRANGE, J. J., *Mémoire sur la théorie des fluides*, Nouv. Mém. Acad. Roy. Sc. et Belles-Lettres de Berlin, 1781, pp. 151-198; cf. §§48-49 de ce mémoire (pp. 197-198).

⁽⁴⁾ MERIAN, J. R., *Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen*, Basel, 1828; reproduit par VONDER MÜHLL, K., *Mathem. Annalen*, 27 (1886), pp. 575-600.

du Talweg (ligne de profondeur maxima dans la direction où se fait le mouvement d'oscillation) et h_0 par la profondeur moyenne. Naturellement, les périodes ainsi obtenues présenteront couramment un écart de 10 ou 20 % avec la période exacte, ce qui n'empêche pas la formule de MERIAN d'être intéressante pour effectuer des vérifications.

Dans son grand ouvrage « Tides and Waves », paru en 1845, G. B. AIRY ⁽⁵⁾ reprit entièrement le problème des ondes liquides dans un canal de profondeur constante (problème à une dimension horizontale) et donne une interprétation physique complète des résultats; ceux-ci sont maintenant classiques, et l'on en trouvera un exposé dans le traité de H. LAMB ⁽⁶⁾; nous y reviendrons du reste plus loin à propos de l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides (cf. p. 19), qui est fondamentale dans la théorie des seiches.

Ainsi, au moment même où les physiciens reconnaissent la véritable nature des seiches, la théorie mathématique du phénomène à une dimension horizontale et pour une profondeur constante se trouve prête, et il ne restera plus qu'à l'étendre au cas de la profondeur variable. Ce sera l'œuvre principalement de G. CHRYSTAL ⁽⁷⁾, en attendant que des méthodes plus modernes permettent de résoudre de manière approchée des cas de lacs absolument quelconques. En 1891, peu avant les travaux de G. CHRYSTAL, P. DU BOYS ⁽⁸⁾ proposa sur la base des considérations physiques simples, une formule qui constitue une extension de celle de MERIAN au cas de la profondeur variable, mais n'est valable que pour le mode fondamental; elle s'écrit

$$T_1 = \int_0^l \frac{2dx}{\sqrt{gh(x)}}$$

et sera désignée sous le nom de « formule de DU BOYS ».

Malgré sa simplicité, elle permet de trouver dans la plupart des cas des périodes fort voisines de celles que fournit l'observation; mais dès qu'on cherche à la généraliser en l'écrivant (comme le fit G. CHRYSTAL, cf. p. 27).

$$T_k = \frac{2}{k} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}$$

on obtient des résultats beaucoup moins bons. Quant à la signification mathématique de cette formule, elle sera étudiée plus loin (cf. pp. 26-27.) Il est aussi

⁽⁵⁾ AIRY, G. B., *Tides and Waves*, Encyclopaedia Metropolitana, London, 1845, vol. V, pp. 241-396; cf. pp. 293 sqq.

⁽⁶⁾ LAMB, H., *Hydrodynamics*, New-York, 1945-1946, pp. 258 sqq.

⁽⁷⁾ CHRYSTAL, G., *Some Results in the Mathematical Theory of Seiches*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 25 (1904), pp. 328 sqq.; Id., *On the Hydrodynamical Theory of Seiches*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 41 (1905), pp. 599-649; Id., *Some Further Results in the Mathematical Theory of Seiches*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 25 (1904), pp. 637-647.

⁽⁸⁾ DU BOYS, P., *Essai théorique sur les Seiches*, Arch. Sc. Phys. et Nat., Genève, 25, 3^e sér., 1891, pp. 628-652.

intéressant de remarquer que la profondeur $h(x)$ est ici la profondeur extrême de la section perpendiculaire au Talweg et non plus sa profondeur moyenne. Tout se passe donc comme si l'onde se propageait d'abord suivant l'axe des grandes profondeurs (Talweg) et s'épanouissait ensuite des deux côtés de celui-ci pour aller se manifester sur les rives.

Si cette hypothèse est exacte, il semble que les seiches devraient donner lieu à des mouvements transversaux qui se surajoutent au mouvement longitudinal; il devrait également y avoir un léger retard de l'onde sur les rives par rapport à celle qui se propage le long du Talweg. Malheureusement, une observation précise du phénomène n'est guère réalisable ailleurs qu'au voisinage des rives (cf. p. 14), de sorte que cette dernière conclusion reste incontrôlable.

Tel était l'état de la question au moment où parurent les grands mémoires de G. CHRYSTAL (1904-1906), dont il sera fait une analyse détaillée au chapitre I de la première partie, en même temps qu'une discussion plus approfondie des théories « anciennes » évoquées ici.

Causes des seiches. — Des observations répétées (anciennes et récentes) ont montré que des seiches de grande amplitude ont presque toujours lieu par temps orageux; (à titre d'indication, des seiches de quelques décimètres d'amplitude sont considérées comme « grandes » pour le lac de Genève). On a cependant relevé des cas de seiches par vent violent non accompagné d'orage⁽⁹⁾; d'autre part, il peut y avoir orage sans qu'apparaissent des seiches : pour qu'elles se déclanchent, il faut que l'orage frappe sur le lac; s'il frappe à côté, sur la terre ferme, il reste sans effet sur le balancement de l'eau. On peut conclure des faits ainsi résumés qu'une première cause des seiches réside dans les variations brusques de la pression atmosphérique sur une position plus ou moins étendue de la surface du lac.

Dans son intéressant article sur les seiches du Loch Earn, G. CHRYSTAL⁽¹⁰⁾ consacre un paragraphe à l'étude de l'effet des variations de pression atmosphérique sur les seiches d'un lac parabolique; ces méthodes peuvent être étendues à d'autres lacs. Les principales conclusions physiques qui se dégagent de ce travail peuvent se résumer comme suit :

Supposons que la pression atmosphérique à l'une des extrémités du lac (que nous prendrons, pour simplifier, de profondeur et de largeur constantes) augmente brusquement, de cinq millimètres de mercure par exemple, et que cette différence de pression se maintienne pendant un temps suffisamment long pour que la surface du lac puisse prendre la position d'équilibre que lui impose cette perturbation, sa nouvelle configuration présentera une dénivellation de : $5 \text{ mm} \times 13,6 = 68 \text{ mm}$ entre les deux extrémités. Supposons qu'une fois cette

⁽⁹⁾ Cf. FOREL, F. A., *op. cit.*, pp. 168-212.

⁽¹⁰⁾ CHRYSTAL, G., *On the Seiches of Loch Earn*. Part V, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 46 (1907-1908), pp. 499-516.

nouvelle forme prise par la surface libre, la pression s'uniformise à nouveau brusquement sur tout le lac : une série de seiches se trouvera ainsi amorcée; leur amplitude sera de 34 mm, c'est-à-dire que l'écart entre les dénivellations extrêmes sera de $2 \times 34 = 68$ mm. Si, après s'être brusquement annulé à une extrémité du lac, l'excédent de pression de 5 mm de mercure fait place à une dépression de même grandeur à cet endroit, ou, ce qui revient au même, réapparaît à l'autre extrémité du lac, une demi-période plus tard, c'est-à-dire au moment où la surface de l'eau atteint à cet endroit son niveau le plus bas, l'amplitude des seiches déclanchées sera évidemment doublée et atteindra 68 mm. On comprend ainsi comment une distribution convenable de perturbations de la pression atmosphérique peut provoquer des seiches d'amplitude considérable. Mais dans la pratique on restera bien entendu fort loin de ce cas idéal de résonance entre l'onde de pression atmosphérique et l'oscillation libre du lac, où l'on a en outre supposé implicitement que le profil temporaire d'équilibre créé par l'excédent local de pression coupait le niveau moyen (c.à.d. à pression uniforme) à l'endroit précis où se situe le nœud de la seiche uninodale excitée.

Il est clair, par exemple, que l'amplitude de la seiche sera moindre si la période d'oscillation de la perturbation atmosphérique diffère de celle de l'eau du lac ou cesse d'être en phase avec elle; notamment, une perturbation instantanée (percussion) ou extrêmement lente ne produira aucun mouvement d'oscillation appréciable de l'eau.

En fait même, de véritables oscillations stationnaires localisées de la pression atmosphérique n'ont guère de chance de se produire; ce qui peut s'observer, c'est une perturbation de la pression atmosphérique se déplaçant le long d'une portion plus ou moins étendue de la surface du lac, avec une vitesse suffisante pour y amorcer des seiches; toutefois, on pourra généralement en décomposer le profil en une superposition de profils plus simples, susceptibles d'amorcer des seiches uninodales, binodales etc., tous types d'oscillations que l'on retrouvera, avec des amplitudes variées, dans l'analyse du mouvement de l'eau.

Ceci aidera à comprendre pourquoi le fondamental ne peut guère apparaître à l'état pur.

Il existe encore d'autres causes de seiches, mais leur action ne sera qu'exceptionnelle. Il est clair, par exemple, qu'une modification brusque et définitive de la forme du bassin, sous l'effet d'un cataclysme quelconque (éboulement d'une montagne, avalanche de neige, etc.), pourra produire une seiche. De même, un tremblement de terre qui ferait subir à une portion importante des parois du bassin un ébranlement lent, s'y traduirait par une seiche.

Au contraire, des secousses sismiques rapides n'auraient aucune chance d'en provoquer, à cause de la trop grande inertie de la masse d'eau.

Types de seiches. — Les considérations élémentaires que l'on vient de lire à propos de l'apparition des seiches sous l'action des variations de pression atmosphérique supposaient implicitement que l'on avait affaire à un phénomène

à une seule dimension horizontale. Dans la réalité, les choses peuvent être beaucoup moins simples. Aussi convient-il d'introduire ici la distinction entre seiches « longitudinales » et seiches « transversales ».

Par seiches longitudinales, on désignera dans ce travail les oscillations stationnaires libres qui ont lieu dans le sens de la plus grande dimension horizontale du bassin (sa « longueur »); nous verrons qu'elles peuvent être traitées pratiquement comme un problème à une seule dimension; elles ont fait de nombreuses recherches (voir la bibliographie à la fin du volume) et seront traitées en détail dans la première partie de ce travail.

Les seiches transversales, qui ont lieu dans le sens de la largeur (direction orthogonale au Talweg longitudinal), posent un problème plus compliqué, qui, à notre connaissance, n'a encore fait l'objet d'aucun travail théorique. On établira dans la seconde partie de cette thèse que leur apparition dépend des variations de largeur et de profondeur du lac, et que les équations différentielles auxquelles on est conduit contiennent deux variables spatiales. Divers artifices permettent cependant de simplifier ces équations.

Revenons-en maintenant aux seiches longitudinales.

Les remarques qui suivent s'appliquent principalement à ce premier type, mais s'étendent sans difficulté au cas des seiches transversales.

On vient de voir dans quelles conditions une seiche uninodale peut apparaître, dans un bassin fermé, sous l'action d'une variation de pression atmosphérique (puisque c'est là la cause principale des seiches). Ces conditions ne seront évidemment réalisées que dans des cas d'autant plus rares que le lac est plus étendu.

Dès que l'« onde » de pression atmosphérique présente un profil différent de celui nécessaire à l'apparition du fondamental à l'état pur, la surface du lac adoptera une forme que l'on pourra considérer comme résultant de la superposition de plusieurs profils de modes normaux, d'amplitudes diverses.

F. A. FOREL analyse le cas particulier où l'oscillation résultante ne se compose que du fondamental et de la binodale ⁽¹¹⁾, et où les périodes respectives de ces deux modes sont dans un rapport voisin de 2. Comme la binodale (plus sensible à l'amortissement) présente en général une amplitude bien moindre que le fondamental, le « limnogramme » (c'est-à-dire le diagramme du niveau de l'eau, en fonction du temps), relevé en un point quelconque (non nodal!) de la rive du lac, se rapprochera d'une sinusoïde, et cela d'autant plus que l'amplitude de la binodale sera plus faible; la période T_1 étant voisine de $2 T_2$, il n'y aura qu'une seule déformation par période dans la courbe résultante.

Cette déformation est désignée sous le nom de « dent de Forel ». Si $T_1 = 2 T_2$, la dent est fixe sur la courbe résultante. Si $T_1 > 2 T_2$, elle « avance », c'est-à-dire se déplace vers les temps décroissants; si $T_1 < 2 T_2$, elle « recule », c'est-à-dire

⁽¹¹⁾ Cf. FOREL, F. A., *op. cit.*, II, pp. 113 sqq.; voir aussi BOUASSE, H., *Houle, Rides, Seiches et Marées*, pp. 165 sqq.

se déplace vers les temps croissants. Le rapport T_1/T_2 se détermine aisément en comptant après combien de périodes T_1 , la dent se replace dans la même région du limnogramme. Par exemple, si la dent en recul reprend sa position initiale après k périodes T_1 , on aura $(2k-1) T_2 = kT_1$, d'où $T_1/T_2 = 2 - 1/k$; si elle est en avance, on aura de même $(2k+1) T_2 = kT_1$, c'est-à-dire $T_1/T_2 = 2 + 1/k$.

Ce type de seiches, résultant de la superposition d'une binodale de faible amplitude à une uninodale d'amplitude notablement plus forte, est désigné par FOREL sous le nom de « seiches dicrites » (c'est-à-dire à double « battement » i.e. « période », *δίς, κρότος*).

L'importance pratique de ce type de seiches peut être considérable. En effet, quand un système de seiches s'établit (et nous venons de voir que le fondamental ne peut guère apparaître à l'état pur), les modes supérieurs disparaissent pratiquement en l'espace de quelques périodes du fondamental, leur décrement logarithmique étant beaucoup plus petit que celui de ce dernier, de sorte que les seules composantes de quelque importance de l'oscillation seront le fondamental et ses harmoniques inférieurs, puis, bientôt, le fondamental et le premier harmonique (c'est-à-dire l'uninodal et le binodal) seulement. Ceci résulte de considérations élémentaires de mécanique.

Signalons également l'existence de seiches dans les bassins ouverts.

L'observation montre que toute masse d'eau, quelque compliquée que soit sa forme, possède au moins un mode d'oscillation stationnaire libre. Il n'est même pas nécessaire que sa surface libre soit limitée de toutes parts par des parois ou des côtes; on observera donc, suivant les cas, des seiches entre les côtes opposées d'un isthme ou d'un détroit, à l'intérieur d'un golfe ou d'une baie, et même dans des fosses marines limitées d'un côté par des hauts-fonds et de l'autre par des côtes terrestres (cas des « marées » de Malte, oscillations libres d'une période de 20 minutes environ, se produisant dans la fosse de Malte, où les marées luni-solaires sont pratiquement imperceptibles). Mathématiquement, le problème ne diffère de celui des seiches des masses d'eau fermées que par ses conditions-frontière. Nous aurons l'occasion au chapitre I de la première partie de revenir sur la question et de décrire une méthode de calcul applicable aux golfes.

Méthodes d'observation des seiches. — Il existe une grande variété d'appareils pour l'étude expérimentale du phénomène naturel. En voici un classement sommaire ⁽¹²⁾.

Une première catégorie d'instruments (citée seulement pour mémoire) cherche à mettre en évidence le renversement du courant d'eau, dû à la seiche.

F. A. FOREL ⁽¹³⁾ préconise un appareil qu'il appelle plemyramètre (*πλεμύρα* = marée), et qui consiste essentiellement en un baquet rempli d'eau, en com-

⁽¹²⁾ Cf. BOUASSE, H., *op. cit.*, pp. 159 sqq.

⁽¹³⁾ FOREL, F. A., *op. cit.*, II, p. 88.

munication avec celle du lac par un tube formant siphon. Le frottement de l'eau dans le tube élimine les variations du niveau de très courte période (petites vagues, vibrations, etc.), ce qui permet de prendre le niveau lentement variable dans le baquet pour le niveau moyen du lac à l'endroit où l'appareil est installé. La partie horizontale du tube-siphon est en verre et contient une bille de même densité que l'eau, que deux ressorts empêchent de quitter le tube. Quand le niveau du lac baisse, la bille vient buter contre l'un des ressorts; quand il monte, elle bute contre l'autre ressort. On peut ainsi déterminer les laps de temps qui s'écoulent entre deux instants de renversement du courant d'eau et, par suite, la période de l'oscillation. Les observations seront naturellement gênées par les légères fluctuations de niveau dues à des causes fortuites (coups de vent, sillages de bateaux passant au large, etc.), car l'appareil, au dire de FOREL lui-même, est d'une sensibilité extrême : une dénivellation de quelques dixièmes de millimètre (sic !) serait décelable. De plus, comme l'appareil ne nous apprend rien de ce qui se passe entre les instants où le courant d'eau se renverse ni même sur l'amplitude des dénivellations à étudier, on ne voit guère comment il permettrait de débrouiller un phénomène complexe, résultant de la superposition de plusieurs types d'oscillation. Néanmoins, il semble que FOREL a su en tirer parti, puisqu'il en recommande vivement l'emploi.

Une seconde catégorie d'appareils cherche à déterminer le niveau de l'eau à chaque instant, par lecture directe. Ils consistent en des dispositifs plus ou moins ingénieux, où un flotteur, équilibré par un contrepoids à l'aide de fils passant sur un jeu de poulies, entraîne un stylet traçant sur une bande de papier, qui se déroule avec une vitesse constante appropriée, le graphique des variations, à échelle convenable; ce graphique est le limnogramme du lac étudié.

FOREL ⁽¹⁴⁾ en décrit un type particulièrement simple, avec lequel il réussit à débrouiller les seiches du Léman.

On peut ainsi déterminer le niveau de l'eau en enregistrant les variations de pression sur le fond du lac, à proximité des rives. Le principe de cette troisième catégorie d'instruments est alors le suivant : on mesure à l'aide d'un manomètre (à mercure ou anéroïde) la pression subie par une masse d'air enfermée dans une sorte de petite cloche à plongeur immergée au fond du lac; les variations de niveau se traduisent ainsi en variations de pression, qu'il suffit d'enregistrer sur une bande de papier.

Quel que soit le type d'appareil employé, les limnogrammes sont généralement de forme compliquée et contiennent, malgré les précautions prises pour les éliminer, un certain nombre de vibrations et d'autres variations de niveau parasites, périodiques ou non, qui rendent le débrouillage des composantes harmoniques plus ou moins malaisé.

Pour que l'interprétation des limnogrammes soit possible, il est indispensable de posséder un grand nombre de courbes relevées en des points variés du

⁽¹⁴⁾ FOREL, F. A., *op. cit.*, II, p. 90.

contour du lac, et synchronisées avec précision. En effet, il ne s'agit pas seulement de connaître les périodes des différents types de seiches, mais également de dresser des cartes de leurs amplitudes relatives et de leurs phases, et de localiser leurs ventres et leurs nœuds.

Comme on n'aura pas à s'occuper dans ce travail de débrouiller des limnogrammes, on n'insistera pas sur les procédés d'analyse harmonique utilisés à cet effet, et dont il existe de nombreux exposés dans des ouvrages traitant spécialement du calcul numérique ⁽¹⁵⁾.

Le travail d'interprétation des limnogrammes sera en général facilité par l'étude préalable des seiches du lac. Celle-ci peut se faire, soit expérimentalement, à l'aide de modèles réduits, soit théoriquement, par le calcul.

Les modèles réduits sont des sortes de maquettes des lacs que l'on veut étudier, dans lesquelles on fait osciller de l'eau. Les oscillations de ce bassin en miniature ⁽¹⁶⁾ sont provoquées par le mouvement de va-et-vient d'une tige verticale fixée à la partie inférieure du modèle et sur laquelle coulisse un poids; on modifie la période d'oscillation de ce balancier jusqu'à obtenir la résonance. L'entretien se fait à l'aide d'un électro-aimant.

Afin de rendre le phénomène plus aisément observable (notamment en vue de le photographier ou de le filmer), on peut encore saupoudrer la surface de l'eau de poussière d'aluminium.

L'emploi des modèles réduits repose sur la loi de similitude suivante : si α est le rapport de similitude des dimensions horizontales de deux bassins et β le rapport de similitude des profondeurs, le rapport des périodes d'oscillation pour des seiches de même type est $\alpha/\sqrt{\beta}$ ⁽¹⁷⁾. Il n'est pas pratique de prendre $\beta = \alpha$, à cause de la très faible profondeur relative des lacs réels : leur profondeur maxima ne représente le plus souvent que quelques millièmes, tout au plus un ou deux centièmes de leur longueur mesurée le long du Talweg; aussi, des modèles réduits qui représenteraient ce rapport seraient-ils pratiquement inutilisables. Grâce aux modèles réduits, on peut reproduire assez commodément tous les types d'oscillation que l'on désire étudier. Il faut cependant remarquer que, si l'on est entièrement libre dans le choix de α , on ne peut disposer de β que pour autant que la profondeur du modèle réduit reste petite devant la longueur de celui-ci (mesurée le long du Talweg) — ou, plus exactement, devant la longueur d'onde des seiches que l'on désire étudier. Si cette dernière condition cessait d'être satisfaite, les oscillations de l'eau du modèle réduit cesseraient de

⁽¹⁵⁾ Cf. par exemple MILNE, W. E., *Numerical Calculus*, Princeton, N.J. 1949, pp. 294-303; WHITTAKER, E. and ROBINSON, G., *Calculus of Observations*, 4th ed., Blackie, London, 1944, pp. 260 sqq., 343 sqq.

⁽¹⁶⁾ Cf. BOUASSE, H., *op. cit.*, pp. 171 sqq.

⁽¹⁷⁾ On trouvera une démonstration de cette loi dans BOUASSE, H., *op. cit.*, pp. 169-171 et dans CALOI, P., *Le Sesse del Lago di Garda* (Parte III), *Annali di Geofisica*, 2 (1949), pp. 19-23.

représenter de véritables seiches pour devenir des « ondes de surface » (cf. chapitre I, pp. 17-18) et, par suite, les expériences effectuées avec le modèle réduit pourraient conduire à des conclusions non valables pour le lac réel. On peut également faciliter l'interprétation des limnogrammes en calculant, à l'aide des différentes méthodes qui seront exposées dans les pages qui suivent, les principaux modes d'oscillation du lac. Ces méthodes ont fait dûment leurs preuves; elles se recourent les unes les autres et sont susceptibles d'autres contrôles divers (notamment par la vérification de l'orthogonalité des fonctions propres obtenues). Aussi leur application est-elle en fin de compte plus rapide et beaucoup moins coûteuse que les essais à l'aide de modèles réduits; en revanche, leurs résultats, même mis sous forme de courbes et de graphiques, seront toujours moins suggestifs et moins complets que ceux que fournit une observation du phénomène « in vivo », que l'on peut encore photographier et filmer à loisir.

Le lecteur trouvera à la fin du volume une bibliographie de la question des seiches; la première partie comprend des travaux anciens, cités pour mémoire; la seconde embrasse la période qui va de 1904 à nos jours.

PREMIÈRE PARTIE

Les seiches longitudinales.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

§ 1. ONDES DE MARÉE, ONDES DE SURFACE.

Le phénomène des seiches appartient à la catégorie des ondes liquides dites « de marée » (les « tidal waves » des auteurs de langue anglaise). La caractéristique de ce type d'ondes réside dans le fait que le mouvement du liquide y est principalement horizontal et que les déplacements sont sensiblement les mêmes pour toutes les particules situées sur la même verticale.

Ceci revient, dans les équations de l'hydrodynamique (cf. § 2), à négliger devant la pression hydrostatique la légère variation de pression due à l'accélération verticale des particules fluides. Ceci est légitime, étant donné la lenteur des oscillations étudiées, mais suppose essentiellement que la profondeur du bassin considéré soit suffisamment faible devant les dimensions horizontales de celui-ci pour que les couches profondes de la masse participent au mouvement horizontal dans la même mesure que les couches superficielles. Lorsque ce type de mouvement a lieu dans un bassin de profondeur constante et suivant une seule dimension horizontale, cette hypothèse simplificatrice est désignée couramment sous le nom d'« hypothèse du parallélisme des tranches liquides »; dans ce cas, en effet, tout se passe comme si le liquide se déplaçait par tranches planes, toutes perpendiculaires à la direction du mouvement, les dénivellations verticales résultant simplement de l'aplatissement ou de la dilatation des tranches : les parois extrêmes sont supposées verticales et la masse (ainsi que la densité) de l'eau en oscillation sont évidemment invariables.

Si la profondeur cesse d'être constante, l'hypothèse du parallélisme des tranches tombe en défaut; nous verrons (cf. § 3) qu'on peut cependant continuer à l'utiliser comme une approximation commode, à condition que la profondeur ne varie que lentement le long de l'axe où a lieu le mouvement d'oscillation à l'échelle de la longueur d'onde de la seiche.

Lorsque l'accélération verticale ne peut plus être négligée dans les équations de l'hydrodynamique, on obtient la catégorie des ondes liquides dites « de surface » (les « surface waves » des auteurs de langue anglaise), dont un cas important est celui des oscillations libres en eau « profonde », c'est-à-dire de profondeur non négligeable devant les dimensions horizontales du bassin (plus exactement : devant la longueur d'onde des oscillations considérées). Au lieu de se mouvoir par tranches parallèles, l'eau est maintenant le siège d'une agitation dont l'amplitude diminue à mesure qu'on descend de la surface libre vers le fond; ces oscillations sont aussi beaucoup plus rapides que dans le cas des « ondes de marée ».

Il va de soi qu'il n'y a pas de frontière nette entre ces deux types d'ondes liquides; dans nombre de cas intermédiaires, on pourra les rattacher à l'une ou à l'autre catégorie, suivant le degré de rigueur avec lequel on désire analyser les phénomènes.

§ 2. LES ÉQUATIONS D'EULER DE L'HYDRODYNAMIQUE.

Voici, pour rappel, les équations d'EULER; leur démonstration est trop connue pour être reprise ici. Notations : v_x, v_y, v_z : composantes (parallèles aux axes Ox, Oy, Oz respectivement) de la vitesse au point x, y, z à l'instant t ⁽¹⁸⁾; X, Y, Z : composantes (même remarque) des forces extérieures par unité de masse; p : pression; ρ : densité du liquide; τ : température absolue. Rappelons encore que le mouvement est supposé « continu » (i.e. v_x, v_y, v_z sont des fonctions continues de x, y, z ; elles sont partout finies, de même que leurs dérivées $\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x}, \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial y}, \dots$, etc.).

Équations du mouvement :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

A ces quatre équations il faut encore ajouter l'équation caractéristique du liquide, relation entre p, ρ, τ : $F(p, \rho, \tau) = 0$, ou $\rho = f(p, \tau)$. Seulement, comme dans les problèmes

⁽¹⁸⁾ Ces grandeurs sont habituellement représentées par u, v, w dans les ouvrages classiques. Pour des raisons pratiques, on a préféré réserver ces trois derniers symboles pour désigner d'autres grandeurs qui interviennent constamment dans les calculs des chapitres qui suivent.

qui nous occupent, les liquides sont traités comme incompressibles, et que l'on ne tient pas compte des variations de température dans l'étude des seiches, l'équation caractéristique se réduit à $\rho = \text{const.}$, ce qui permet immédiatement de simplifier l'équation de continuité, et de l'écrire : $\text{div} (v_x v_y v_z) = 0$.

§ 3. L'HYPOTHÈSE DU PARALLÉLISME DES TRANCHES LIQUIDES.

Commençons par examiner le cas le plus simple, celui des « ondes de marée » à une seule dimension horizontale, dans un canal de largeur et de profondeur (h_0) constantes et à parois verticales. Dans un tel canal, la section droite, c'est-à-dire le polygone dont les côtés sont les intersections d'un plan perpendiculaire à l'axe avec les parois et le fond du canal et avec la surface libre de l'eau, est évidemment un rectangle de dimensions constantes. Soit Ox l'axe parallèle à la longueur du canal; l'axe Oz est vertical et dirigé vers le haut; la surface libre est un plan d'équation $z = h_0$, et le fond un plan d'équation $z = 0$; la dénivellation est mesurée par ζ . Négliger l'accélération verticale des particules fluides revient évidemment à prendre la pression au point (x, z) égale à la pression hydrostatique due à la colonne de liquide de hauteur $h_0 + \zeta - z$, augmentée de la pression extérieure p_0 (supposée constante et uniforme à la surface libre : condition de Poisson). On a ainsi : $p = p_0 + \rho g (h_0 + \zeta - z)$.

Par suite $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$.

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = X - g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

de sorte que l'accélération horizontale, $\partial v_x / \partial t$, étant indépendante de z , est la même pour toutes les particules situées dans un plan d'équation $x = Cte$; ou, ce qui revient au même, la vitesse horizontale v_x dépend seulement de x et de t . C'est là l'expression mathématique de l'hypothèse du parallélisme des tranches. En l'absence de forces extérieures ($X=0$), et en ne considérant que des mouvements d'amplitude infiniment petite, on peut encore simplifier davantage l'équation du mouvement, qui se réduit ainsi à :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Posons encore

$$\xi = \int v_x dt,$$

ξ étant le déplacement de la tranche liquide parallèlement à l'axe Ox ; si les mouvements sont petits, on peut écrire pour l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (I.1)$$

L'équation de continuité à deux dimensions s'écrit (ρ étant constant, condition désormais sous-entendue) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

L'origine des z étant sur le fond du canal, on en tire

$$v_z = - \int_0^z \frac{\partial v_x}{\partial x} dz = - z \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

ce qui montre que la vitesse verticale d'une particule liquide est proportionnelle à sa distance au fond du canal. A la surface on a

$$z = h_0 + \zeta, \quad v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

d'où

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - (h_0 + \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right),$$

ou, en négligeant le produit

$$\zeta \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x}$$

comme petit du second ordre :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - h_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x},$$

ou, en intégrant par rapport à t :

$$\zeta = - h_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (I.2)$$

Éliminant ζ ou ξ , entre ces deux équations, on obtient respectivement :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (I.3)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (I.4)$$

équations de type bien connu en physique mathématique.

G. B. AIRY ⁽¹⁹⁾ arrive à l'équation (I.3) d'une manière un peu différente. Écrivant qu'il y a égalité entre le volume $h_0 dx$ d'une tranche liquide avant son déplacement (la largeur est constante et égale à l'unité de longueur) et son volume

$$(h_0 + \zeta) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx$$

⁽¹⁹⁾ AIRY, G. B., *Tides and Waves*, Encycl. Metrop., V, pp. 293 sqq.

après un déplacement ξ , il obtient l'équation de continuité sous la forme :

$$h_0 + \zeta = \frac{h_0}{1 + \partial\xi/\partial x}. \quad (\text{I.5})$$

L'équation du mouvement est obtenue en écrivant que l'accélération horizontale de la tranche au point $x + \xi$, soit

$$\frac{\partial^2 (\xi + x)}{\partial t^2},$$

est due à la différence de pression sur les deux faces de celle-ci, différence de pression égale à

$$- \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx,$$

ou, par unité de masse,

$$- g \frac{\partial \zeta}{\partial x} / \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

On a ainsi

$$\frac{\partial^2 (x + \xi)}{\partial t^2} = -g \cdot \frac{1}{1 + \partial\xi/\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (\text{I.6})$$

ou, en éliminant ζ à l'aide de (I.5), et remarquant que x est indépendant du temps :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh_0 \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-3} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (\text{I.7})$$

En développant la parenthèse en série de puissances de $\partial\xi/\partial x$ et en ne retenant que le premier terme, on retrouve immédiatement (I.3). G. B. AIRY envisage pour (I.7) des solutions en première, en seconde et même en troisième approximation ⁽²⁰⁾.

Les résultats ci-dessus restent valables (rigoureusement) pour un canal de section non plus rectangulaire, mais quelconque, étant entendu que sa forme et son aire soient constantes en x . Si S désigne l'aire de cette section droite et b la largeur du canal à la surface libre, l'équation de continuité reste inchangée, pourvu que h désigne maintenant S/b , c'est-à-dire la profondeur moyenne du canal; quant à l'équation du mouvement, elle n'est pas modifiée non plus puisqu'elle ne contient pas b .

Passons maintenant au cas de la section droite variable et montrons que l'hypothèse du parallélisme des tranches peut être conservée pourvu que $S(x + \xi)$ ne diffère guère de $S(x)$, condition pratiquement toujours réalisée pour les lacs réels : en effet, comme nous le verrons plus loin (cf. calculs numériques, chap. III-V); les déplacements ξ ne représentent le plus souvent guère plus de quelques dix-millièmes de la longueur totale du lac (tout au plus un ou deux millièmes dans le cas de seiches d'amplitude exceptionnelle), et il est natu-

⁽²⁰⁾ ID., *ibid.*, pp. 294 sqq.

rellement très rare que $S(x)$ varie de manière appréciable pour d'aussi faibles écarts relatifs en x . Considérons donc une section transversale, d'aire $S(x)$ et de largeur à la surface libre $b(x)$; le volume d'une tranche liquide d'épaisseur dx sera $S(x) \cdot dx$. Après un temps t , la tranche s'est déplacée pour venir au point $x + \xi$, et son épaisseur est devenue

$$\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx,$$

de sorte que son volume peut s'écrire

$$S(x + \xi) \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \cdot dx.$$

Supposons encore que ζ conserve la même valeur sur toute la largeur de la tranche; cela revient à admettre qu'il n'y a pas d'écoulement transversal et que toutes les particules d'eau situées dans le même plan transversal possèdent la même vitesse parallèlement au plan Oxz ; cette condition est habituellement vérifiée, sauf dans le cas d'un lac dont les rives sont en pente très douce, et même alors l'exception n'a lieu qu'au voisinage immédiat de ces rives (« shelving effect »). Dans ces conditions, la partie de la tranche située au-dessus du niveau de la surface libre a pour volume

$$b(x) \cdot \zeta \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \cdot dx$$

[en admettant que l'on puisse confondre $b(x + \xi)$ avec $b(x)$, ce qui est évidemment légitime étant donné l'hypothèse analogue sur $S(x + \xi)$].

Écrivons que la tranche liquide conserve son volume, au cours du déplacement :

$$S(x) dx = [S(x + \xi) + b(x) \cdot \zeta] \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx,$$

d'où

$$b(x) \cdot \zeta = \frac{S(x)}{1 + \partial \xi / \partial x} - S(x + \xi)$$

ou, en développant en séries de puissances et en ne retenant que les premiers termes :

$$b(x) \cdot \zeta = S(x) \cdot \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - S(x) - \xi \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = -S(x) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - \xi \cdot \frac{\partial S}{\partial x}$$

ou

$$\zeta = -\frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [S(x) \cdot \xi]. \quad (I.8)$$

Pour obtenir l'équation du mouvement, remarquons que la différence de pression sur les deux faces de la tranche (arrivée au point $x + \xi$) est simplement due à la différence de niveau — $d\zeta$ qui existe entre ces deux faces, et a donc

pour mesure $-\rho g d\zeta$ par unité de surface. L'équation du mouvement pour la tranche S considérée dans son entièreté s'écrit donc :

$$dx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \cdot \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-1}$$

ou, en développant en série comme ci-dessus :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right).$$

Si nous négligeons encore $\partial \xi / \partial x$ devant 1, ce qui revient à supposer que les accroissements qui résultent pour S (aire de la section droite) de la dénivellation ζ ainsi que du déplacement de la tranche, soit respectivement

$$b(x) \cdot \zeta \quad \text{et} \quad \xi \cdot \frac{\partial S}{\partial x}$$

sont très faibles par rapport à S lui-même (ce qui est assuré puisque la profondeur et la largeur ne varient guère du point x au point $x + \xi$), il reste, pour l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (1.9)$$

§ 4. L'ÉQUATION DE CHRYSTAL ⁽²¹⁾.

Éliminons ζ entre les équations (1.8) et (1.9); il vient, après multiplication par $S(x)$, quantité indépendante du temps :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [S(x) \cdot \xi] = g \cdot S(x) \cdot b(x) \cdot \frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (S \cdot \xi) \right].$$

Changeons maintenant de variables en posant :

$$u = S \cdot \xi, \quad v = \int_0^x b(x) dx.$$

La signification physique de ces nouvelles variables est claire : u représente le volume d'eau balayé par la tranche liquide $S(x)$ au cours de son déplacement ξ , et v n'est autre que l'aire de la surface libre du lac mesurée depuis l'une des extrémités prise comme origine. Posons encore $S(x) \cdot b(x) = \sigma(v)$. L'équation de continuité devient alors $\zeta = -\frac{\partial u}{\partial v}$ et l'équation aux seiches : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \sigma(v) \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}$.

⁽²¹⁾ Cf. CHRYSTAL, G., *On the Hydrodynamical Theory of Seiches*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 41 (1904), pp. 613 sqq.

Le mouvement étant périodique, on a

$$\xi \sim e^{i\omega t} \quad (\omega = 2\pi/T),$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u(v).$$

Il vient ainsi, en posant $\omega^2/g = \lambda$:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0. \quad (\text{I.10})$$

L'introduction des variables u et v , et de la nouvelle équation (I.10) est due à G. CHRYSTAL; aussi l'équation (I.10) est-elle habituellement désignée de ce nom. La courbe d'abscisse v et d'ordonnée $\sigma(v)$ est appelée par cet auteur « courbe normale » du lac; il est clair que dans le cas du lac de largeur b constante et de profondeur variable $h(x)$, cette courbe n'est autre que le profil du fond lui-même : à des facteurs constants près, v se confond alors avec x et $S(x)$ avec $h(x)$. Pour résoudre l'équation de CHRYSTAL (I.10), il reste à soumettre $u(v)$ à deux conditions-frontière résultant des conditions physiques du problème.

Si le lac est borné en $v = 0$ et en $v = a$ (en appelant a l'aire totale de la surface libre du lac) par des murs verticaux, on devra avoir $\xi(0) = \xi(a) = 0$ ou (idem) $u(0) = u(a) = 0$; ceci exprime qu'il n'y a pas de déplacement des tranches liquides aux extrémités du lac. D'autre part, l'équation de CHRYSTAL montre que ces conditions-frontière sont équivalentes à

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)_{v=0} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)_{v=a} = 0;$$

on en conclut que les seiches possèdent des ventres aux extrémités du lac. Si au contraire les parois sont inclinées aux extrémités du lac, les conditions-frontière devront exprimer que le mouvement de l'eau y a lieu tangentiellement au fond, et l'on aura :

$$\zeta = -\frac{dh}{dx} \cdot \xi \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et en } x = l,$$

ou encore, en observant que $\lambda \xi = \frac{d\zeta}{dx}$ (cf. I.9) :

$$\lambda \zeta(0) + h'(0) \zeta'(0) = \lambda \zeta(l) + h'(l) \zeta'(l) = 0.$$

L'équation de CHRYSTAL peut aussi être interprétée comme l'équation du mouvement d'une corde de densité longitudinale variable, tendue horizontalement et vibrant dans un plan vertical. Le rapport tension/densité longitudinale est représenté par $g\sigma(v)$, à condition que les variations de densité longitudinale en des points « voisins » restent faibles devant cette densité elle-même, et que les élongations transversales soient suffisamment petites pour que l'angle aigu d'inclinaison que fait la corde en un point quelconque avec l'horizontale

puisse être confondu avec son sinus et sa tangente; v s'interprète maintenant comme la distance mesurée depuis l'une des extrémités le long de la corde au repos, et u comme l'élongation transversale; les conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$ signifient que les deux extrémités de la corde sont fixes. Enfin, les nœuds de la corde correspondent aux ventres de la seiche et vice versa.

Quant aux deux restrictions imposées ci-dessus, elles sont la traduction en termes de corde vibrante de l'hypothèse du parallélisme des tranches et de son corollaire, l'hypothèse de la faible amplitude des oscillations de l'eau.

Au lieu de la variable indépendante v de CHRYSTAL, on peut aussi introduire la variable s définie par l'égalité

$$s = \int_0^x \frac{dx}{S(x)} \quad \text{ou} \quad s = \int_0^v \frac{dv}{\sigma(v)};$$

contrairement à v (aire de la surface libre), cette variable s n'a pas de signification physique simple; néanmoins, elle reste aisément calculable ou, le cas échéant, mesurable sur une carte bathymétrique du lac. On a, en considérant σ comme une fonction de s , $dv = \sigma(s)ds$, et par suite

$$\zeta = -\frac{1}{\sigma(s)} \frac{du}{ds} \quad \text{ou} \quad u = -\int_0^s \zeta \sigma(s) ds,$$

d'où l'on déduit, pour l'équation modifiée de CHRYSTAL :

$$\frac{d\zeta}{ds} + \lambda \int \zeta \sigma(s) ds = 0,$$

ou, après dérivation,

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \lambda \sigma(s) \zeta = 0. \quad (\text{I.11})$$

Les conditions-frontière s'écrivent maintenant (dérivées par rapport à s) :

$$\zeta'(0) = \zeta'(c) = 0, \quad \text{avec} \quad c = \int_0^a \frac{dv}{\sigma(v)}.$$

Du point de vue pratique, la variable indépendante s sera moins commode à manier que la variable v de CHRYSTAL; cela tient à ce que, dans les calculs numériques (tels qu'on les effectue par exemple dans la méthode de DEFANT, cf. pp. 56 sqq.), on tient avant tout compte de la signification physique de cette variable, qui n'est autre que l'aire de la surface libre du lac, aire aisément mesurable sur une carte : si au contraire on calculait $v = \int_0^x b(x) dx$ sous forme d'une somme $v = \Sigma b(x_i) \Delta x_i$, on aboutirait à de notables écarts, à moins de prendre un nombre prohibitif de divisions; des essais numériques effectués sur le lac Tanganika ont confirmé la chose. On peut cependant remédier à cet inconvénient en modifiant légèrement la définition de s . Pour cela, commençons par définir une largeur moyenne $\beta(x)$, telle que $v = \Sigma \beta(x_i) \Delta x_i = \int_0^x b(x) dx$ rigoureusement : il suffit de prendre $\beta(x_i) = \Delta v_i / \Delta x_i$; $\sigma(v)$ à son tour sera remplacé par $S(x) \beta(x) = \tau(v)$ (posé), de sorte que l'on obtiendra une nouvelle courbe normale (la courbe « corrigée »), qui et général différera peu de la précédente (cf. plus loin graphiques relatifs au Tanganika ne

au lac de Genève). Avec cette nouvelle courbe normale, l'accord sera évidemment rigoureux entre les résultats numériques obtenus à partir des deux équations (I.10) et (I.11).

Il reste à examiner ce que vaut cette courbe « corrigée » du point de vue théorique. Tout d'abord, il y a une inconséquence à mesurer $S(x)$ et $b(x)$ — c'est-à-dire ici $\beta(x)$ — en deux points différents, car le relevé de $S(x)$ lui-même n'est pas indépendant de la largeur du lac; et si à son tour $S(x)$ doit être corrigé (ce qui ne pourrait dans la pratique se faire que d'une manière plus ou moins arbitraire), le raisonnement physique sur lequel s'appuient plusieurs des méthodes approchées décrites au chapitre II perd un peu de sa rigueur. D'autre part, pour calculer $\beta(x)$, il faut diviser Δv , grandeur mesurable avec précision sur une carte, par Δx , grandeur mesurée sur le Talweg (ligne souvent mal définie) et par suite beaucoup moins sûre. L'erreur introduite ainsi pourra aisément être du même ordre de grandeur que celle commise en adoptant comme largeur effective la largeur mesurée directement sur la carte à l'endroit où l'on relève $S(x)$, autrement dit, que celle commise en prenant $v(x) = \Sigma b(x_i) \Delta x_i$, et en utilisant s défini à l'aide de $\sigma(v)$ et non de $\tau(v)$.

Il semble donc bien que l'on puisse s'attendre à une sorte de compensation et qu'en fin de compte les deux équations (I.10) et (I.11) doivent fournir des résultats également acceptables.

Une dernière transformation intéressante de l'équation de CHRYSTAL s'obtient comme suit. Prenons comme nouvelle variable indépendante la grandeur θ , définie par la relation

$$\theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}.$$

La signification physique de θ est aisée à apercevoir : θ représente la moitié du temps nécessaire à une onde progressive, se propageant avec une vitesse $\sqrt{gh(x)}$ (égale à celle de l'onde d'oscillation fondamentale, considérée comme une onde progressive sinusoïdale de longueur double de celle du lac et se réfléchissant alternativement aux deux extrémités) pour parcourir une distance x le long du Talweg, depuis l'extrémité-origine. L'équation de CHRYSTAL prend alors la forme

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \lambda \frac{b^2 gh}{\sigma} u = 0,$$

ou, puisque $\sigma = Sb = hb^2$ (h désignant la profondeur moyenne de la section droite, variant avec x)

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \omega^2 u = 0. \quad (\text{I.11 bis})$$

Sa solution peut se mettre sous la forme

$$u = U_0 e^{i\omega\theta},$$

ou, à cause des conditions-frontière ($u = 0$ aux extrémités du lac),

$$u = U_0 \sin \left(\omega \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}} \right)$$

ou encore

$$u = U_0 \sin \left(\omega \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{g\sigma(v)}} \right).$$

Si l'on utilise ce dernier résultat pour trouver les valeurs propres de l'équation de CHRYSTAL, on posera, pour le fondamental :

$$\omega \int_0^a \frac{dv}{\sqrt{g\sigma(v)}} = \pi \quad \text{d'où} \quad T_1 = 2 \int_0^a \frac{dv}{\sqrt{g\sigma(v)}}, \quad \text{ou} \quad T_1 = 2 \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}},$$

et pour les modes supérieurs, à j nœuds :

$$T_j = \frac{2}{j} \int_0^a \frac{dv}{\sqrt{g\sigma(v)}} \quad \text{ou} \quad T_j = \frac{2}{j} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}.$$

Ces périodes ne sont autres que celles fournies par la formule de DU BOYS (cf. pp. 9, 35 sqq.); le résultat est rigoureux pour le fondamental du lac à section rectangulaire constante ($b(x)$ et $h(x)$ constants), encore acceptable pour le fondamental d'un lac à section droite lentement variable à l'échelle de la longueur d'onde, mais médiocre pour les modes supérieurs (cf. loc. cit.).

La même variable θ permet d'étudier le comportement des fonctions u et ζ en fonction des grandeurs $b(x)$ et $h(x)$.

Entre l'équation du mouvement $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ et l'équation de continuité $\zeta = -\frac{1}{b(x)} \frac{\partial (S\xi)}{\partial x}$ on éliminera ζ ou ξ , suivant que l'on veut étudier la fonction u ou la fonction ζ .

a) Étude de la fonction u . — L'élimination de ζ entre les deux équations ci-dessus donne, après multiplication des deux membres par S :

$$\frac{\partial^2 (S\xi)}{\partial t^2} = gS \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b(x)} \frac{\partial (S\xi)}{\partial x} \right].$$

Introduisons maintenant la variable θ : il vient

$$\frac{\partial^2 (S\xi)}{\partial t^2} = \frac{S}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{b(\theta) \sqrt{h}} \frac{\partial (S\xi)}{\partial \theta} \right],$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{S}{h} \left[-\frac{b'}{b^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{h'}{h b} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

(les accents servant à désigner les dérivés par rapport à θ), ou encore, sous forme plus condensée :

$$\sqrt{\sigma} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Posons, afin de résoudre cette équation, $u = \Phi(\theta) \cdot F(\theta - t)$. Il vient immédiatement

$$2 \frac{\Phi'}{\Phi} \cdot \frac{F'}{F} + \frac{\Phi''}{\Phi} - \left(\frac{1}{2} \frac{h'}{h} + \frac{b'}{b} \right) \left(\frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{F'}{F} \right) = 0.$$

Les termes en F'/F s'annulent si

$$2 \frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{1}{2} \frac{h'}{h} - \frac{b'}{b} = 0,$$

c'est-à-dire si $\Phi = A b^{1/2} h^{1/2}$ ($A = \text{const.}$).

L'équation ci-dessus sera satisfaite si, en outre, Φ''/Φ et Φ'/Φ sont négligeables devant F'/F . La relation $\Phi = A b^{1/2} h^{1/2}$ montre que la seconde de ces deux conditions revient à négliger

$$\frac{1}{2} \left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \right)$$

devant u'/u , ou, puisque $\partial u / \partial x$ est de l'ordre de ζ / Λ ($\Lambda =$ longueur d'onde de l'oscillation), à négliger $\Lambda b'$ et $\Lambda h'$ devant b et h ; or, c'est là précisément ce qu'implique l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides : largeur et profondeur du lac lentement variables le long du Talweg à l'échelle de la longueur d'onde des oscillations considérées. La première condition implique la même restriction quant aux variations de b' et h' ⁽²²⁾.

b) Étude de la fonction ζ . — L'élimination de ξ entre les deux équations fournit de même, après introduction de la variable θ de GREEN,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \zeta'' + \left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \right) \zeta'$$

(les accents désignant à nouveau les dérivées par rapport à θ), ou, à nouveau, sous forme plus compacte :

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0.$$

En posant comme précédemment $\zeta = \Psi(\theta) \cdot G(\theta - t)$, il vient à nouveau

$$2 \frac{\Psi'}{\Psi} \cdot \frac{G'}{G} + \frac{\Psi''}{\Psi} + \left(\frac{1}{2} \frac{h'}{h} + \frac{b'}{b} \right) \left(\frac{\Psi'}{\Psi} + \frac{G'}{G} \right) = 0.$$

⁽²²⁾ Cf. GREEN, G., *Cambr. Trans.*, VI (1837) (= *Papers*, 225) et LAMB., H., *op. cit.*, p. 274.

Les termes en G'/G s'annulent si

$$2 \frac{\Psi'}{\Psi} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} + \frac{b'}{b} = 0,$$

c'est-à-dire si $\Psi = B \cdot b^{-1/2} h^{-1/4}$ ($B = \text{const.}$).

Quant à l'équation en G et Ψ , elle sera satisfaite si les grandeurs Ψ''/Ψ et Ψ'/Ψ sont négligeables devant G'/G . Il est aisé de montrer que ceci implique les restrictions sur les variations de b' et h' déjà établies plus haut.

Dans les pages qui suivent, l'on étudiera un certain nombre de lacs de largeur et de profondeur variable; on verra (cf. p. 46) que les conclusions qui s'en dégagent quant au comportement de ζ rejoignent bien le résultat obtenu ci-dessus : $\zeta \sim b^{-1/2} h^{-1/4}$.

Résoudre l'équation de CHRYSTAL (I.10) revient évidemment à chercher pour quelles valeurs particulières du paramètre λ (« valeurs propres », $\lambda_1, \lambda_2, \dots$) l'équation admet des solutions non nulles (« fonctions propres », u_1, u_2, \dots).

En vertu des théorèmes généraux sur les problèmes de fonctions propres, on peut montrer aisément que les fonctions propres u_1, u_2, \dots de l'équation de CHRYSTAL sont orthogonales entre elles, c'est-à-dire que l'on a, pour des fonctions normées :

$$\int_0^a \frac{u_i u_j}{\sigma(v)} dv = \begin{cases} 0 & (i \neq j); \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

En effet, l'équation est « auto-adjointe »⁽²³⁾, c'est-à-dire que l'on a pour deux fonctions « de comparaison » (c'est-à-dire satisfaisant aux conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$, et deux fois dérivables) : U, V les deux égalités :

$$\int_0^a (U V'' - V U'') dv = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^a \left(-U \frac{V}{\sigma(v)} + V \frac{U}{\sigma(v)} \right) dv = 0;$$

en effet, la première égalité peut s'écrire

$$(UV' - VU')' - \int_0^a (U'V' - V'U') dv = 0$$

et la seconde est une identité.

Or, deux fonctions propres u_i, u_j satisfont évidemment aussi à ces égalités, et l'on a en outre, à cause de l'équation (I.10),

$$u_i'' = -\lambda_i u_i / \sigma(v) \quad \text{et} \quad u_j'' = -\lambda_j u_j / \sigma(v).$$

⁽²³⁾ Cf. COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme und ihre Numer. Behandl.*, Chelsea, New-York, 1948, pp. 59 sqq.

Par suite, la seconde égalité peut s'écrire :

$$\int_0^a \left[\frac{u_i u_j \lambda_j}{\sigma(v)} - \frac{u_j u_i \lambda_i}{\sigma(v)} \right] dv = (\lambda_j - \lambda_i) \int_0^a u_i u_j \frac{dv}{\sigma(v)} = 0;$$

λ_i étant supposé différent de λ_j , on a la propriété d'orthogonalité annoncée.

Naturellement on peut reprendre le même raisonnement point par point pour l'équation (I.11); les relations d'orthogonalité seront dans ce cas :

$$\int_0^c \zeta_i \zeta_j \sigma(s) ds = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{ou} \quad 1 \quad (i = j)$$

(les fonctions ζ_i, ζ_j étant normées).

§ 5. SOLUTIONS EXACTES DE L'ÉQUATION DE CHRYSTAL.

Dans un certain nombre de cas simples, l'équation de CHRYSTAL (I.10) admet des solutions exactes. Leur étude permet de se faire une idée des phénomènes, et notamment de l'effet que peuvent avoir sur la période, sur l'emplacement des ventres et des nœuds ou sur la distribution des amplitudes des seiches, diverses modifications de la forme du bassin; on sera ainsi mieux à même de juger dans quelle mesure on pourra procéder sur un lac réel (et donc le plus souvent de forme capricieuse), à des régularisations de contour ou de profondeur, sans altérer notablement les résultats que l'on a en vue.

a) Pour mémoire, reprenons le cas du lac de profondeur uniforme h_0 , de largeur constante (quelconque puisque b constant s'élimine de l'équation) et de longueur l . L'équation de CHRYSTAL se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{gh_0} \xi = 0, \quad (\text{I.12})$$

et admet pour solution

$$\xi = \frac{\sin \left(\frac{\omega}{\sqrt{gh_0}} x \right)}{\cos \left(\frac{\omega}{\sqrt{gh_0}} x \right)};$$

à cause des conditions-frontière, seul le sinus est recevable, et l'on a

$$\frac{\omega^2}{gh_0} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$$

($k =$ entier positif quelconque, = nombre de nœuds de la seiche). La solution s'écrit dès lors :

$$\xi_k = A_k \sin \frac{k \pi x}{l}.$$

Puisque $\omega = 2 \pi / T$, on a

$$T_k = \frac{2l}{k \sqrt{gh_0}},$$

expression qui n'est autre que la formule de MERIAN. Comme $\zeta = -\frac{\partial u}{\partial v} = (ici) - h_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$ la solution peut aussi s'écrire

$$\zeta_k = C_k \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

b) Cas du lac à fond parabolique concave : $h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ et de largeur constante quelconque.

Au lieu de procéder comme G. CHRYSTAL ⁽²⁴⁾, qui écrit la solution sous forme de série potentielle, dont il détermine ensuite les coefficients par une loi de récurrence, nous modifierons légèrement l'équation (I.10) afin de faire apparaître ζ au lieu de ξ et de donner ainsi à l'équation la forme habituelle de l'équation de LEGENDRE.

On a, pour l'équation de continuité

$$\zeta = -\frac{\partial [h(x) \xi]}{\partial x},$$

et pour l'équation de mouvement

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

ou, puisque le mouvement est harmonique ($\xi \sim e^{i\omega t}$) :

$$\frac{\omega^2}{g} \xi = \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

L'élimination de ξ fournit

$$\frac{d}{dx} \left[h(x) \frac{d\zeta}{dx} \right] + \lambda \zeta = 0.$$

On a alors, avec $h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, et en posant $\frac{x}{a} = x'$, $\frac{\lambda a^2}{h_0} = \mu$:

$$\frac{d}{dx'} \left[(1 - x'^2) \frac{d\zeta}{dx'} \right] + \mu \zeta = 0. \quad (\text{I.13})$$

A cause de l'inclinaison des parois en $x' = \pm 1$, les conditions-frontière sont modifiées : il faut exprimer que le mouvement a lieu tangentiellement au fond aux points $x' = \pm 1$: on a donc $\zeta = -\xi dh/dx'$ en ces points.

L'équation du mouvement permet d'éliminer ξ ; on obtient ainsi les conditions-frontière $\mu\zeta(1) - 2\zeta'(1) = \mu\zeta(-1) + 2\zeta'(-1) = 0$.

L'équation de LEGENDRE (I.13) a pour solution $\zeta = C_k P_k(x')$, avec $\mu = k(k+1)$; $P_k(x') = k^e$ polynôme de LEGENDRE, $C_k =$ constante arbitraire, $k =$ entier positif quelconque. On vérifie sans difficulté que les conditions-frontière sont satisfaites par les poly-

(24) CHRYSTAL, G., *op. cit.*, p. 617.

nômes de LEGENDRE quand $\mu = k(k+1)$: pour $k = 1$, $\mu = 2$, $\zeta_1 = C_1 x'$; pour $k = 2$, $\mu = 6$, $\zeta_2 = C_2(3x'^2 - 1)$; pour $k = 3$, $\mu = 12$, $\zeta_3 = C_3(5x'^3 - 3x')$, etc.

En normant, on trouve pour les constantes les valeurs

$$C_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad C_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad C_3 = \frac{\sqrt{14}}{4}, \quad \text{etc.}$$

On arriverait au même résultat en exigeant que ζ reste fini en $x' = \pm 1$ et en développant la solution ζ sous forme de série potentielle en x' : pour que la série soit finie en $x' = \pm 1$, il faut qu'elle se termine, ce qui fournit la condition $\mu = k(k+1)$, c'est-à-dire les valeurs propres au paramètre et par suite les périodes d'oscillation :

$$T_k = \frac{2\pi a}{\sqrt{k(k+1)gh_0}}.$$

Dans l'oscillation uninodale, le profil de l'eau reste plan; il est parabolique pour la binodale; pour ce second mode, les nœuds sont situés en

$$x' = \pm \sqrt{3}/3 = \pm 0,5774,$$

c'est-à-dire sont déplacés légèrement vers les extrémités, et la dénivellation ζ est deux fois plus grande aux extrémités ($x' = \pm 1$) qu'au centre ($x' = 0$).

Enfin, remarquons encore que les périodes des quatre premiers modes sont entre elles comme 1,000, 0,577, 0,408, 0,316; pour le lac de profondeur constante, de même longueur $2a$ et de même profondeur moyenne $2h_0/3$, ces périodes étaient entre elles comme 1,000, 0,500, 0,333, 0,250. Leurs valeurs respectives par rapport à celles du lac parabolique sont données par le quotient

$$\frac{2\sqrt{k(k+1)}}{k\pi\sqrt{2/3}},$$

qui, pour $k = 1, 2, 3, 4$, prend les valeurs 1,1026, 0,9549, 0,9003, 0,8717.

On voit donc que le rôle joué par la forme du bassin, le volume de l'eau restant le même dans les deux cas, n'est pas négligeable. Si le lac parabolique est coupé par un mur vertical en $x' = 0$, les solutions sont les mêmes, mais l'on a une condition frontière nouvelle : $\zeta'(0) = 0$ (ventre à l'origine), et par suite, seuls les polynômes $P_k(x')$ d'ordre pair peuvent convenir; les périodes des deux premiers modes sont dans le rapport 0,577 : 0,316, et le nœud de l'uninodale est en $x' = 0,5774$.

c) Le cas du lac parabolique convexe

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)$$

est notablement plus compliqué et de peu d'intérêt pratique, un tel profil ne se rencontrant pratiquement jamais parmi les lacs réels qu'on peut être amené à étudier. Les solutions ζ ne s'expriment plus par des polynômes mais par des fonctions transcendentes qu'il faut tabuler; notons simplement que le rapport T_2/T_1 est maintenant égal à 0,474 et que les nœuds de l'oscillation binodale déplacés en direction du haut-fond central, se trouvent en $x' = \pm 0,472$.

G. CHRYSTAL traite ensuite différents cas des lacs (de largeur toujours constante) dont le profil peut se décomposer en plusieurs arcs de parabole raccordés de manière continue; il en résulte en général des équations d'une complication telle que l'on n'a plus guère d'intérêt à en chercher des solutions « exactes » et qu'il est plus commode, le cas échéant, de les résoudre par des méthodes approchées; aussi n'entrerons-nous pas dans la discussion de ces problèmes qui, du reste, n'éclaire guère la question qui nous occupe ici ⁽²⁵⁾.

d) Plus intéressant est le cas du lac quartique concave (de largeur constante)

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2.$$

L'équation différentielle du problème s'écrit ($\mu = \lambda a^2/h_0$, $x' = x/a$) :

$$\frac{d^2 u}{dx'^2} + \frac{\mu u}{(1-x'^2)^2} = 0. \quad (\text{I.14})$$

Posons, avec CHRYSTAL ⁽²⁶⁾, $\mu = 4m^2 + 1$; on a alors l'intégrale

$$u = \sqrt{1-x'^2} \left[A \cos \left(m \operatorname{Log} \frac{1+x'}{1-x'} \right) + B \sin \left(m \operatorname{Log} \frac{1+x'}{1-x'} \right) \right].$$

Les points $x' = \pm 1$ sont maintenant des points de singularité essentielle de la solution, et par suite, la courbe $h(x) = h_0(1-x'^2)^2$ ne peut être utilisée dans son entièreté; limitons donc le lac par deux murs verticaux en $x' = p$ et $x' = q$. Les conditions-frontière en ces murs sont $u(p) = u(q) = 0$. Posons

$$\operatorname{Log} \frac{1+p}{1-p} = r, \quad \operatorname{Log} \frac{1+q}{1-q} = s;$$

on a alors

$$A \cos mr + B \sin mr = 0,$$

$$A \cos ms + B \sin ms = 0,$$

et par suite

$$\sin m(r-s) = 0, \quad \text{c. à d.} \quad m \operatorname{Log} \left(\frac{1+p}{1+q} \cdot \frac{1-q}{1-p} \right) = k\pi.$$

On a donc

$$\mu \equiv 4m^2 + 1 = \frac{4k^2\pi^2}{(r-s)^2} + 1,$$

et, comme

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^2}{gh_0 T^2},$$

on en tire aisément

$$T_k^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{g h_0 [1 + 4k^2\pi^2/(r-s)^2]} \quad \text{ou} \quad T_k = \frac{2\pi a}{\sqrt{g h_0 [1 + 4k^2\pi^2/(r-s)^2]}}.$$

⁽²⁵⁾ Cf. CHRYSTAL, G., *op. cit.*, pp. 628-635.

⁽²⁶⁾ CHRYSTAL, G., *Some Further Results in the Mathematical Theory of Seiches*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 25 (1904), pp. 638 sqq.

Si les murs sont disposés symétriquement par rapport à l'origine (centre du lac, endroit de profondeur maximum), c'est-à-dire si $p = -q$, on a

$$r - s = 2 \operatorname{Log} \frac{1 + p}{1 - p};$$

si en outre $(r - s)$ est petit, c'est-à-dire si $p \ll 1$ (murs « voisins » du centre), on a

$$T_k \simeq \frac{(r - s) a}{k \sqrt{gh_0}},$$

et puisque dans ce cas

$$\operatorname{Log} \frac{1 + p}{1 - p} \simeq \operatorname{Log} (1 + 2p) \simeq 2p,$$

on a finalement

$$T_k \simeq \frac{4p}{k \sqrt{gh_0}}.$$

On remarque que ce résultat est identique à celui trouvé pour le lac de profondeur constante (formule de MERIAN). On pouvait du reste s'y attendre, puisque, si $p = -q \ll 1$, le lac est réduit à sa portion centrale, où la profondeur ne varie que très peu avec x' .

Au contraire, si $(r - s)$ devient grand, c'est-à-dire si $p = -q$ se rapproche de 1, on voit immédiatement que T_k tend vers $2\pi a / \sqrt{gh_0}$, expression indépendante de k : toutes les seiches, indépendamment du nombre de leurs nœuds, tendent à prendre la même période. C'est le phénomène des « seiches anormales » de CHRYSTAL. On obtient le même résultat en faisant $m = 0$, c'est-à-dire $\mu = 1$, sans faire encore d'hypothèses sur p et q .

L'intégrale de l'équation différentielle s'écrit alors

$$u = \sqrt{1 - x'^2} \left[A + B \operatorname{Log} \frac{1 + x'}{1 - x'} \right].$$

G. CHRYSTAL ⁽²⁷⁾ montre que dans le cas $p = -q$, cette solution prend la forme simple $u = \sqrt{1 - x'^2}$.

Le cas de lac quartique est instructif : il montre que pour $(r - s)$ petit, c'est-à-dire le lac étant limité à sa portion centrale, les périodes des trois premiers modes T_1, T_2, T_3 sont entre elles comme

$$\left[1 + \frac{4\pi^2}{(r - s)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \left[1 + \frac{16\pi^2}{(r - s)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \left[1 + \frac{36\pi^2}{(r - s)^2} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

on voit ainsi que $T_1 < 2T_2, T_1 < 3T_3$, etc., et que, moyennant un choix convenable de $(r - s)$, on peut avoir par exemple $T_3 = T_1/2$, ce qui montre qu'une seiche de période égale à la moitié de celle du fondamental n'est pas nécessairement binodale, comme le croyaient couramment les auteurs anciens (F. A. FOREL, P. DU BOYS, etc.).

Un tel mouvement est dit « anharmonique », par opposition au mouvement harmonique, où l'on a $T_1 = kT_k$.

(27) Cf. CHRYSTAL, G., *op. cit.*, pp. 645 sqq.

e) Le cas des lacs quartiques convexes,

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^2$$

moins intéressant que le précédent du point de vue pratique car ne se rencontrant sans doute jamais parmi les lacs réels, conduit de manière analogue aux périodes

$$T_k = \frac{2\pi a}{\sqrt{gh_0 [4k^2 \pi^2 / (r-s)^2 - 1]}}$$

de sorte que l'on a maintenant $T_1 > 2T_2$, $T_1 > 3T_3$, etc. ⁽²⁸⁾.

A partir de ces résultats et de ceux qu'il avait obtenus pour les lacs paraboliques (concaves et convexes), CHRYSTAL établit une classification des lacs en concaves et en convexes, les premiers étant caractérisés par la relation

$$T_k = \frac{T_1}{\sqrt{k^2 + \varepsilon^2}}$$

et les seconds par

$$T_k = \frac{T_1}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}$$

($\varepsilon =$ constante réelle) propriétés que l'observation semblerait confirmer ⁽²⁹⁾.

L'auteur entreprend également de comparer ses résultats avec ceux que l'on obtiendrait en appliquant la formule de DU BOYS.

Cette formule, établie primitivement à partir de considérations physiques n'interessant que le mode fondamental [considéré comme résultant d'une onde progressive, de longueur double de celle du lac, se déplaçant avec une vitesse $\sqrt{gh(x)}$ et se réfléchissant alternativement aux deux extrémités ⁽³⁰⁾], constitue en fait une première approximation de la valeur propre de l'équation de CHRYSTAL (I.10); elle est rigoureuse pour $\sigma(v) =$ constante (canal de section droite rectangulaire uniforme).

En effet, l'équation de CHRYSTAL

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0, \quad (\text{I. 10})$$

avec ses conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$, peut être considérée du point de vue mathématique comme résultant de la transformation de l'équation de STURM-LIOUVILLE :

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda g(x) y = 0$$

⁽²⁸⁾ Cf. CHRYSTAL, G., *op. cit.*, pp. 642 sqq.

⁽²⁹⁾ Cf. BOUSSE, H., *op. cit.*, p. 154.

⁽³⁰⁾ Cf. DU BOYS, P., *op. cit.*, p. 644, note 8.

(où, dans tout l'intervalle $0 \leq x \leq l$, les fonctions $k(x)$ et $g(x)$ sont supposées continues et ne s'annulent pas; en outre, $k'(x)$ et $[g(x) \cdot k(x)]'$ sont supposées continues dans ce même intervalle), effectuée à l'aide des relations (posées), dont l'idée remonte à G. GREEN et à G. G. STOKES :

$$w = \frac{1}{K} \int_0^x (g/k)^{1/2} dx; \quad u = (gk)^{1/4} y; \quad \rho^2 = K^2 \lambda a^2 / \pi^2;$$

$$K = \frac{1}{a} \int_0^l (g/k)^{1/2} dx = \text{const.}^{(31)}.$$

Ces relations transforment l'équation de STURM-LIOUVILLE ci-dessus en l'équation :

$$\frac{d^2 u}{dw^2} + \left[\frac{\rho^2 \pi^2}{a^2} - q(w) \right] u = 0,$$

avec

$$q(w) = \frac{\theta''(w)}{\theta(w)},$$

en posant $(gk)^{1/4} = \theta(w)$; l'intervalle $0 \leq x \leq l$ est remplacé par l'intervalle $0 \leq w \leq a$, dans lequel $q(w)$ est supposé continu.

Les conditions-frontière sont $u(0) = u(a) = 0$.

L'équation

$$\frac{d^2 u}{dw^2} + \frac{\rho^2 \pi^2}{a^2} u(w) = q(w) u(w)$$

admet pour solution générale :

$$u(w) = A \cos \frac{\rho \pi w}{a} + B \sin \frac{\rho \pi w}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \int_0^w \sin \frac{\rho \pi}{a} (w-z) \cdot q(z) u(z) dz.$$

Les conditions-frontière donnent

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{\sin(\rho \pi/a)} \cdot \left(\frac{a}{\rho \pi} \right)^2 \int_0^a \cos \frac{\rho \pi}{a} (a-z) \cdot (q' u - q u') dz.$$

Par suite, la solution générale peut s'écrire (à un facteur constant près) :

$$u(w) = \sin \frac{\rho \pi w}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \cdot \alpha(\rho, w)$$

avec

$$\alpha(\rho, w) = \int_0^w \sin \frac{\rho \pi}{a} (w-z) \cdot q(z) u(z) dz$$

⁽³¹⁾ Cf. GREEN, G., *Papers*, p. 225 et LAMB, H., *op. cit.*, p. 274. Cf. également COURANT, R. und HILBERT, D., *Meth. Math. Physik*, I, p. 250 et INCE, E. L., *Ordin. Diff. Equations*, p. 270.

ou

$$\begin{aligned}
u(w) &= \sin \frac{\rho \pi w}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \int_0^w \sin \frac{\rho \pi}{a} (w-z) \cdot q(z) \cdot \left[\sin \frac{\rho \pi z}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \cdot \alpha(\rho, z) \right] dz \\
&= \sin \frac{\rho \pi w}{a} \cdot \left\{ 1 + \frac{a}{\rho \pi} \int_0^w \cos \frac{\rho \pi z}{a} \cdot \left[\sin \frac{\rho \pi z}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \cdot \alpha(\rho, z) \right] q(z) dz \right\} \\
&\quad - \cos \frac{\rho \pi w}{a} \cdot \frac{a}{\rho \pi} \int_0^w \sin \frac{\rho \pi z}{a} \cdot \left[\sin \frac{\rho \pi z}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \cdot \alpha(\rho, z) \right] q(z) dz \\
&= \sin \frac{\rho \pi w}{a} \cdot \left\{ 1 + 0 \left[\left(\frac{a}{\rho \pi} \right)^2 \right] \right\} + \cos \frac{\rho \pi w}{a} \cdot 0 \left[\left(\frac{a}{\rho \pi} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

On démontre que dans ce cas les valeurs propres sont données par

$$\rho_j = (j+1) + 0(j^{-1}) \quad (j = 0, 1, 2 \dots)^{(32)}.$$

On a donc bien, en première approximation,

$$\rho_j^2 = \frac{a^2}{\pi^2} K^2 \lambda = (j+1)^2,$$

c'est-à-dire, à cause des relations de la page 36 :

$$T_j = \frac{2}{j} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}},$$

c'est-à-dire la formule de DU BOYS généralisée.

Naturellement, dans le cas où $g(x)$ et $k(x)$ se réduisent à des constantes (section droite uniforme), on a $q(w) = 0$, et il reste simplement

$$u(v) = \sin \frac{\rho \pi v}{a},$$

ρ étant maintenant un entier positif (à cause des conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$); la formule de DU BOYS est alors rigoureuse.

On a vu sur des exemples que les périodes des seiches k -nodales sont en général loin d'être k fois plus courtes que celles du fondamental; aussi ne faut-il pas s'étonner si les résultats que fournit la formule de DU BOYS pour les modes supérieurs soient médiocres. Pour le fondamental du lac quartique l'approximation paraît acceptable : on a, en prenant le signe supérieur ou inférieur suivant qu'il s'agit du lac concave ou du lac convexe :

$$\frac{T_1(\text{DU BOYS})}{T_1(\text{CHRYSTAL})} = \sqrt{1 \pm \frac{(r-s)^2}{4\pi^2}}$$

(le cas $r = s$ étant évidemment exclu, de sorte que la formule de DU BOYS ne fournit jamais la période exacte).

⁽³²⁾ Cf. INCE, E. L., *op. cit.*, *loc. cit.*

f) Cas du canal dont le fond se compose de deux plans également inclinés se coupant au milieu du canal (point de profondeur maximum = h_0) ⁽³³⁾.

Étant donné la symétrie d'un tel canal, il suffit d'étudier les seiches dans l'une quelconque de ses moitiés; dans l'autre moitié, elles seront symétriques ou antisymétriques suivant que le centre du lac est un point ventral ou un point nodal.

Prenons l'une des extrémités comme origine; le fond a alors pour équation, depuis ce point jusqu'au milieu ($x = a$) :

$$h(x) = h_0 \frac{x}{a}.$$

L'équation en ζ s'écrit

$$\frac{d}{dx} \left[h_0 \frac{x}{a} \frac{d\zeta}{dx} \right] + \lambda \zeta = 0$$

ou, en posant $\lambda a/h_0 = \mu$:

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d\zeta}{dx} \right] + \mu \zeta = 0, \quad (\text{I.15})$$

et admet pour solution $\zeta = A J_0(2\sqrt{\mu x})$.

Les équations aux périodes sont, pour les modes symétriques : $J'_0(2\sqrt{\mu a}) = 0$, et pour les modes antisymétriques : $J_0(2\sqrt{\mu a}) = 0$.

Les deux premières racines de ces équations étant respectivement $2\sqrt{\mu a} = 3,8317$, $7,0156$, et $2\sqrt{\mu a} = 2,4048$, $5,5201$, on aura, puisque

$$\mu = \frac{4\pi^2 a}{gh_0 T^2} :$$

$$T_1 = 0,8317 \times 2\pi a / \sqrt{gh_0}; \quad T_2 = 0,5220 \times 2\pi a / \sqrt{gh_0}; \quad T_3 = 0,3623 \times 2\pi a / \sqrt{gh_0};$$

$$T_4 = 0,2851 \times 2\pi a / \sqrt{gh_0};$$

ces périodes sont donc entre elles comme 1,000, 0,628, 0,436, 0,343.

Si le lac était coupé par un mur vertical en $x = a$, on ne retiendrait évidemment que les modes symétriques, les périodes ci-dessus T_2 , T_4 , etc. devenant respectivement celles du fondamental, de la binodale, etc.

G. CHRYSTAL envisage encore quelques cas spéciaux de lacs à fond plan incliné, tronqués, dissymétriques, etc. Mais, tout comme pour les lacs paraboliques similaires, les solutions sont compliquées et n'éclairent guère les phénomènes.

Examinons pour suivre quelques cas de lacs de largeur variable, la profondeur étant tantôt constante, tantôt variable.

Si l'on veut traiter le problème en général, il faut introduire une seconde variable horizontale, y ; l'on obtient pour l'équation de continuité

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) \cdot v_x] - \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) \cdot v_y]$$

et pour les équations du mouvement

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

⁽³³⁾ CHRYSTAL, G., *Hydrodynamical Theory of Seiches*, pp. 636 sqq.

Éliminant v_x et v_y , et prenant $\zeta \sim e^{i\omega t}$, il vient ⁽³⁴⁾

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] + \frac{\omega^2}{g} \zeta = 0. \quad (\text{I.16})$$

g) Un premier cas, classique, est celui du lac circulaire de rayon a et de profondeur constante h_0 ⁽³⁵⁾.

En passant à des coordonnées polaires (r, θ) , à l'aide des relations $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, on trouve l'équation bien connue

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \lambda \zeta = 0, \quad (\text{I.17})$$

où l'on a posé $\omega^2/g h_0 = \lambda$. Les variables se séparent aisément si l'on pose $\zeta = f(r) \frac{\cos}{\sin} s \theta$ (s représentant le nombre de nœuds diamétraux) et l'on trouve $f(r) = A_s J_s(r\sqrt{\lambda})$. La condition-frontière habituelle $\partial \zeta / \partial n = 0$ en $r = a$ ($n =$ normale au mur vertical qui limite le bassin, dirigée vers l'extérieur) fournit l'équation aux périodes $J'_s(a\sqrt{\lambda}) = 0$. Dans le cas $s = 0$, le mouvement est complètement symétrique autour de l'origine, et les racines sont $a\sqrt{\lambda} = 3,8317, 7,0156, 10,173, \text{ etc...}$, d'où

$$T_1 = 0,8199 \times 2a/\sqrt{gh_0}; \quad T_2 = 0,4478 \times 2a/\sqrt{gh_0}; \quad T_3 = 0,3088 \times 2a/\sqrt{gh_0}.$$

On trouvera une discussion complète des différents cas dans l'ouvrage de H. LAMB ⁽³⁶⁾.

Le cas du lac circulaire de profondeur variable $h(r) = h_0(1 - r^2/a^2)$ est aussi traité en détail par cet auteur ⁽³⁷⁾, auquel nous renvoyons pour compléments d'information. Il est intéressant de remarquer que le cercle nodal (unique) du mode fondamental de ce lac est notablement déplacé vers la côte ($r = 0,707 a$, contre $r = 0,628 a$ dans le cas du lac circulaire de profondeur constante); quant à la période du fondamental, elle est aussi plus longue dans le lac de profondeur variable que dans celui de profondeur constante. Ces résultats sont similaires à ceux que fournit la comparaison du canal parabolique au canal de profondeur uniforme (cf. p. 32).

Le traitement du problème à deux dimensions étant beaucoup plus compliqué que celui du problème à une dimension, il vaut la peine de voir dans quelle mesure les résultats (notamment les périodes d'oscillation) sont affectés lorsqu'on traite à une seule dimension un lac de largeur et de profondeur variables non assimilable à un « canal ». La question a été soulevée par K. HIDAOKA ⁽³⁸⁾ à propos du lac circulaire de profondeur variable $h(r) = h_0(1 - r^2/a^2)$ dont il vient d'être question. On trouve, pour le mode fondamental : $\lambda_1 a^2 = 2$. Si on assimile ce lac à un « canal » de largeur $b(x) = 2a(1 - x^2/a^2)^{1/2}$ et de profondeur $h(x) = h'_0(1 - x^2/a^2)$, h'_0 étant la profondeur moyenne d'une section

⁽³⁴⁾ Cf. LAMB, H., *Hydrodynamics*, 1945, pp. 282, 291.

⁽³⁵⁾ ID., *op. cit.*, p. 284.

⁽³⁶⁾ ID., *ibid.*

⁽³⁷⁾ ID., *ibid.*, pp. 291-293.

⁽³⁸⁾ HIDAOKA, K., *Oscillations of Water in Spindle-Shaped and Elliptic Basins*. I, Mem. Imp. Mar. Obs. Japan, IV, 2 (1931), pp. 175 sqq.

diamétrale, on trouve $\lambda_1' a^2 = 3$. Comme $h_0' = 2h_0/3$, il résulte que l'on doit avoir $T_1 = T_1'$: la période du mode fondamental n'est donc pas affectée par la simplification que l'on a fait subir au problème.

Pour les modes supérieurs toutefois, le désaccord entre les résultats obtenus pour les problèmes à une et à deux dimensions va en s'accroissant à mesure que le nombre de nœuds augmente, ainsi qu'on peut s'y attendre en considérant la forme de la surface libre dans ces différents modes d'oscillations. K. HIDAOKA ⁽³⁹⁾ le remarque à propos de lacs elliptiques et de lacs en forme de fuseau, dont il sera question ci-après.

Dans une série d'articles parus entre 1930 et 1940, cet auteur et ses élèves K. KOENUMA et I. TUBOI ⁽⁴⁰⁾ ont examiné un grand nombre de lacs de largeur variable et de profondeur tantôt constante, tantôt variable, en vue de découvrir des cas admettant des solutions exactes. Nous donnons ici un bref aperçu des travaux de cette école japonaise.

Un long article de K. HIDAOKA est consacré aux lacs en forme de fuseau et aux lacs elliptiques ⁽⁴¹⁾.

h) Une première catégorie de lacs comprend ceux en fuseau, limités par deux paraboles homofocales d'axes opposés, d'équations $y^2 = a(a - 2x)$ et $y^2 = a(a + 2x)$; la profondeur est constante et égale à h_0 .

Le problème est traité d'abord à deux dimensions, à l'aide de coordonnées paraboliques (p, q) définies par

$$x = \frac{a}{2}(p^2 - q^2), \quad y = apq;$$

les solutions s'obtiennent sous forme de fonctions hypergéométriques généralisées ⁽⁴²⁾ mais sont beaucoup trop compliquées pour se prêter commodément à des calculs numériques. Si on se limite à l'étude des oscillations symétriques par rapport à l'axe Oy , le problème se simplifie quelque peu, et les solutions s'expriment en fonctions de BESSEL d'ordre $\pm 1/4$; les lignes nodales consistent en diamètres et en paraboles homofocales à celles qui limitent le bassin : on voit ainsi immédiatement la simplification excessive qu'il y aurait à réduire le problème à une seule dimension, du moins pour les modes qui admettent d'autres lignes nodales que l'axe des x .

Ceci est vérifié par les calculs de HIDAOKA, qui traite à titre d'essai le bassin comme un canal de largeur variable :

$$b(x) = a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

L'auteur développe les solutions ζ_n en séries potentielles de x/a (puissances impaires seulement pour les modes impairs, et paires seulement pour les modes pairs); les fonctions propres obtenues pour les deux premiers modes diffèrent peu de

$$\cos \frac{\pi x}{a} \quad \text{et} \quad \cos \frac{2\pi x}{a}$$

respectivement.

⁽³⁹⁾ HIDAOKA, K., *Oscillations of Water in Spindle-Shaped and Elliptic Basins*. I, Mem. Imp. Mar. Obs. Japan, IV, 2 (1931), pp. 175 sqq.

⁽⁴⁰⁾ Cf. bibliographie, pp. 306 sqq.

⁽⁴¹⁾ Cf. note 38.

⁽⁴²⁾ Cf. RIEMANN-WEBER, *Partielle Diffgl.*, II, pp. 258-260.

Si l'on compare les résultats obtenus pour le problème ainsi simplifié avec ceux du problème à deux dimensions, on constate que l'accord n'est satisfaisant que pour le fondamental. Déjà pour le second mode, le désaccord entre les périodes obtenues par les deux procédés devient considérable : en effet, la largeur maxima a du « canal » ne peut plus être considérée comme faible devant sa longueur $2a$. Ceci illustre combien l'étude des seiches d'un lac reste incomplète tant que l'on se borne aux seiches longitudinales, surtout si la largeur du lac n'est pas très petite devant sa longueur.

i) L'auteur considère ensuite le cas du lac elliptique de profondeur constante. Si le petit axe est très petit devant le grand, le bassin peut être considéré comme un canal de largeur variable

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Introduisant cette valeur dans l'équation de CHRYSTAL, on obtient une équation du type de celle de MATHIEU; il suffit alors de développer les solutions en série potentielle de x/a (série impaire pour les modes impairs, paire pour les modes pairs) pour obtenir une relation entre trois coefficients, et, par suite, une équation aux valeurs propres sous forme de fraction continue; les racines de celle-ci coïncident avec celles obtenues par S. GOLDSTEIN ⁽⁴³⁾ pour le même problème.

La comparaison du lac en fuseau et du lac elliptique va permettre de déterminer l'influence, sur les périodes d'oscillation, d'un rétrécissement du canal vers les extrémités. Pour cela, K. HIDAKA considère un lac-canal, de profondeur constante h_0 et de largeur

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m,$$

m étant un nombre positif réel.

Suivant que $m = 0, 1/2$ ou 1 , on obtient un lac-canal rectangulaire, elliptique ou en fuseau. Posons

$$m = 2^\gamma \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\text{Log } m}{\text{Log } 2}$$

et appelons, avec HIDAKA, γ « l'indice de rétrécissement » du lac vers les extrémités. Quand $\gamma = -\infty$, le bassin est rectangulaire; quand $\gamma = -1$ il est elliptique; quand $\gamma = 0$ il est en fuseau, et quand $\gamma = 1, 2, \dots$ le rétrécissement devient de plus en plus marqué (cf. fig. 1). L'équation du bassin est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{y^2}{b_0^2}\right)^{\frac{1}{2m}} = 1.$$

L'équation de CHRYSTAL devient, en posant $\frac{x}{a} = x'$, $\lambda a^2 = \mu$:

$$\frac{d}{dx'} \left[(1 - x'^2)^m \frac{d\zeta}{dx'} \right] + \mu (1 - x'^2)^m \zeta = 0.$$

⁽⁴³⁾ GOLDSTEIN, S., *Special Case of Tidal Motions in Elliptic Basins*, Monthly Notices Roy. Astr. Soc., Geoph. Supp. II, 1 (1928); ID., *Free Oscill. of Water in a Canal of Elliptic Plan*, Proc. London Math. Soc., 28 (1928), pp. 91-101.

En procédant comme plus haut, c'est-à-dire en développant les solutions en séries potentielles (paires ou impaires suivant la parité du mode considéré) et en écrivant les relations entre trois coefficients sous forme de fraction continue, l'auteur obtient des valeurs propres μ_k pour un certain nombre de valeurs-types de γ . Pour le fondamental (μ_1) on a la table suivante :

γ	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	$-\infty$,
m	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	0,
$\sqrt{\mu_1}$	3,557	2,589	2,150	1,887	1,737	1,655	1,616	1,597	1,571 = $\pi/2$.

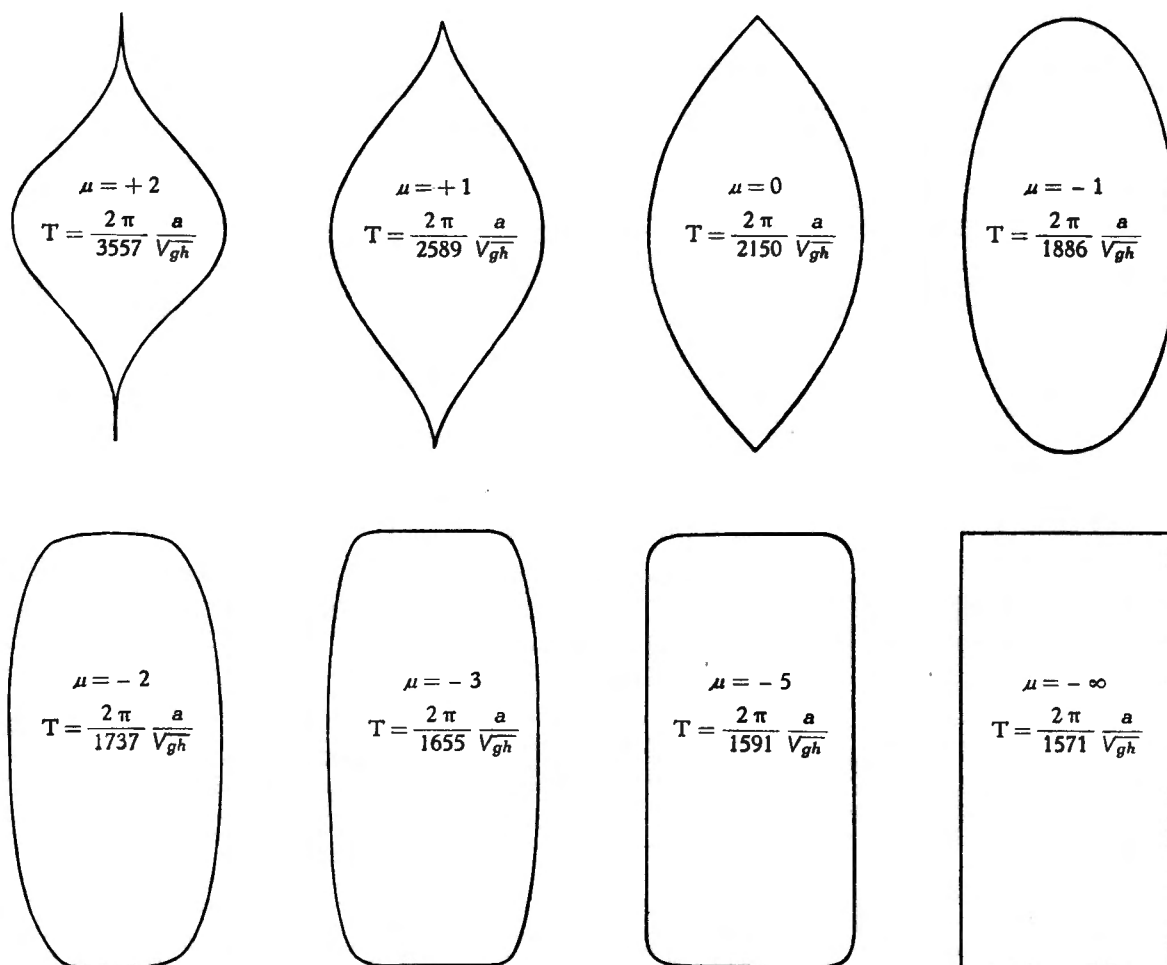


FIG. 1.

Quelques contours de bassins dérivés du bassin elliptique.

[D'après K. HIDAOKA, Mem. Imp. Mar. Obs. Japan, IV, 2 (1931), pp. 175 sqq.]

Au lieu de μ , lire γ sur cette figure.

Le rétrécissement du lac vers les extrémités a donc pour effet de raccourcir la période de manière très marquée : du lac rectangulaire ($m = 0$) au lac en fuseau ($m = 1$), ce raccourcissement de la période fondamentale atteint 27 %.

j) Si les lacs en fuseau et elliptiques se prêtent relativement bien au calcul de modes d'oscillation les plus bas, il n'en est plus de même pour les modes supérieurs : la réso-

lution des équations aux valeurs propres écrites sous forme de fractions continues devient fastidieuse pour les racines supérieures.

C'est pourquoi K. HIDAOKA envisage une nouvelle catégorie de lacs, dont la largeur est donnée par

$$b(x) = 2b_0 \cos^m \frac{\pi x}{2a};$$

la forme de ces lacs diffère assez peu de celle des lacs de largeur

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m;$$

pour $m = 0, 1/2, 1$, on retrouve notamment un lac (rigoureusement) rectangulaire, un lac à peu près elliptique et un lac à peu près en fuseau.

L'équation de CHRYSTAL devient, en posant $\sin^2 \frac{\pi x}{2a} = x'$ et $\lambda a^2 = \mu$:

$$x'(1-x')\zeta'' + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{m}{2} + 1\right)x'\right]\zeta' + \frac{\mu}{\pi^2}\zeta = 0.$$

Si l'on écrit

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} [m\pi - \sqrt{m^2\pi^2 + 16\mu}];$$

$$\beta = \frac{1}{4\pi} [m\pi + \sqrt{m^2\pi^2 + 16\mu}]; \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

cette équation prend la forme hypergéométrique

$$x'(1-x')\zeta'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x']\zeta' - \alpha\beta\zeta = 0,$$

et ζ s'exprime sous forme de fonctions hypergéométriques. Les solutions devant être finies en $x = \pm a$, on obtient, après quelques calculs, les valeurs propres :

$$\mu_{2k-1} = (2k-1)(2k-1+m) \cdot \pi^2/4 \quad \text{pour les modes impairs, d'ordre } 2k-1,$$

$$\mu_{2k} = 2k(2k+m) \cdot \pi^2/4 \quad \text{pour les modes pairs, d'ordre } 2k.$$

On vérifie notamment que pour k petit, ces résultats diffèrent peu de ceux obtenus pour les lacs elliptiques et en fuseau traités précédemment.

k) Passons maintenant aux lacs (en fuseau et elliptique) de profondeur variable, suivant la loi parabolique

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Pour le lac en fuseau, de largeur $b(x) = 2b_0(1 - x^2/a^2)$, l'équation de CHRYSTAL devient, en posant $x/a = x'$ et $\lambda a^2 = \mu$:

$$(1-x'^2)\zeta'' - 4x'\zeta' + \mu\zeta = 0.$$

Les modes impairs sont donnés par

$$\zeta = Ax' \cdot F\left(1 - k, \frac{3}{2} + k, \frac{3}{2}; x'^2\right) \quad (k = 1, 2 \dots)$$

avec $\mu = 4k^2 + 2k - 2$, et les modes pairs par

$$\zeta = B \cdot F\left(-k, \frac{3}{2} + k, \frac{1}{2}; x'^2\right)$$

avec $\mu = 4k^2 + 6k$.

Pour le fondamental, le profil de l'eau reste plan, et pour le second mode, il est parabolique, avec ses nœuds en $x' = \pm 0,447$.

L'effet du rétrécissement du lac vers les extrémités l'emporte donc ici sur celui du relèvement du fond vers ces mêmes extrémités, puisque les nœuds sont déplacés vers le centre du lac.

Dans le cas du lac elliptique, $b(x) = 2b_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, on obtient de même l'équation

$$(1 - x'^2)\zeta'' - 3x'\zeta' + \mu\zeta = 0;$$

les modes impairs sont donnés par

$$\zeta = Ax' \cdot F\left(1 - k, 1 + k, \frac{3}{2}; x'^2\right),$$

avec $\mu = 4k^2 - 1$, et les modes pairs par

$$\zeta = B \cdot F\left(-k, 1 + k, \frac{1}{2}; x'^2\right)$$

avec $\mu = 4k^2 + 4k$.

Le fondamental présente cette fois encore un profil plan et le second mode un profil parabolique; quant aux nœuds, ils sont maintenant en $x' = \pm 0,500$, c'est-à-dire que les deux effets mentionnés ci-dessus se compensent exactement.

Ces résultats sont encore susceptibles de la même généralisation que ceux obtenus pour les lacs de profondeur constante. Écrivons pour la largeur

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m :$$

l'équation de CHRYSTAL devient

$$(1 - x'^2)\zeta'' - 2(m + 1)x'\zeta' + \mu\zeta = 0,$$

et les modes impairs sont donnés par

$$\zeta = Ax' \cdot F\left(1 - k, m + \frac{1}{2} + k, \frac{3}{2}; x'^2\right),$$

avec $\mu = 4k^2 + 2(2m - 1)k - 2m$, tandis que l'on a pour les modes pairs

$$\zeta = B \cdot F\left(-k, m + \frac{1}{2} + k, \frac{1}{2}; x'^2\right)$$

avec $\mu = 4k^2 + 2(2m + 1)k$.

Si l'on définit à nouveau un « indice de rétrécissement » comme plus haut, $\gamma = \frac{\text{Log } m}{\text{Log } 2}$, on peut dresser la table suivante pour $\sqrt{\mu_1}$:

γ	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	$-\infty$,
m	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	0,
$\sqrt{\mu_1}$	3,162	2,449	2,000	1,732	1,581	1,500	1,458	1,436	1,414 = $\sqrt{2}$.

On voit que maintenant, du lac rectangulaire ($m = 0$) au lac en fuseau ($m = 1$), le raccourcissement de la période fondamentale est encore plus sensible qu'à profondeur constante, puisqu'il est voisin de 30 %.

Comparons encore les périodes d'oscillation des lacs de profondeur uniforme et de profondeur variable (fond parabolique), la profondeur uniforme h_0 étant calculée de manière à ce que le volume d'eau soit le même dans les deux cas :

$$\bar{h}_0 = \frac{\int_0^a h(x) b(x) dx}{\int_0^a b(x) dx},$$

on trouve ainsi : $\bar{h}_0 = 4h_0/5$ pour le lac en fuseau et $\bar{h}_0 = 3h_0/4$ pour le lac elliptique.

Pour le fondamental, on a $T_{\text{var.}}/T_{\text{unif.}} = 0,962$ pour le bassin en fuseau et 0,943 pour le bassin elliptique; pour le second mode, ce rapport est respectivement égal à 1,073 et 1,061; on voit que les écarts de périodes entre lacs de profondeur uniforme et de profondeur variable (parabolique) sont peu importants.

Dans les lacs à profondeur variable, on s'est limité ici au profil parabolique, symétrique par rapport au centre ($x = 0$). Grâce à cette symétrie (jointe à celle de la largeur), la dénivellation ζ pouvait s'exprimer chaque fois sous forme de séries potentielles paires ou impaires (suivant les modes considérés) de x/a . Si la profondeur $h(x)$ cesse d'être symétrique par rapport au centre il n'en sera plus ainsi. Ce sera notamment le cas si $h(x)$ varie linéairement avec x , par exemple si l'on a

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right) \quad \text{ou} \quad h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

De tels lacs à fond plan incliné et à contour en fuseau ou elliptique sont envisagés par HIDAHA; pour le lac en fuseau, les solutions trouvées dépendent des fonctions de BESSEL, et pour le lac elliptique elles doivent être tabulées spécialement. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de ces problèmes; nous nous contenterons de tirer quelques conclusions de cette étude de lacs en fuseau et elliptique, à profondeur constante ou variable.

Le volume d'eau contenu dans les bassins de profondeur constante étant supposé égal à celui des bassins de profondeur variable, on remarque :

1° que les périodes d'oscillation des bassins à fond plan incliné sont toujours plus longues que celles des bassins de profondeur constante, et ceci aussi bien dans le lac rectangulaire que dans le lac elliptique et dans le lac en fuseau.

2° que le rapport T_2/T_1 est toujours supérieur à $1/2$ (sauf pour le lac rectangulaire, où il est égal à $1/2$), quel que soit le type de fond envisagé. Les bassins elliptiques et en fuseau peuvent donc se classer parmi les bassins « concaves » de CHRYSTAL (cf. p. 35).

3° que le rapport des amplitudes de ζ au bout le moins profond à ζ au bout le plus profond (lacs à fond plan incliné) est maximum dans le lac en fuseau et minimum dans le lac rectangulaire.

4° que dans les lacs à fond plan incliné, le nœud du fondamental est le plus proche du centre, dans le cas du lac en fuseau, et qu'il en est le plus éloigné dans le cas du lac rectangulaire.

On voit dès lors qu'à profondeur constante, l'effet d'une variation de largeur est de déplacer le nœud vers l'extrémité la plus large; quant à l'amplitude de la dénivellation ζ , elle sera toujours plus considérable à l'extrémité la plus étroite.

A largeur constante au contraire, l'effet des variations de profondeur est de déplacer le nœud vers l'extrémité la moins profonde; c'est à cette extrémité également que l'amplitude de la dénivellation ζ sera la plus considérable.

Ceci est entièrement conforme aux résultats obtenus précédemment (cf. p. 29).

l) Des conclusions identiques se dégagent de l'étude des lacs de forme dissymétrique autour du centre, auxquels K. HIDAOKA consacre également un long article ⁽⁴⁴⁾. La symétrie autour de $x = 0$ est néanmoins conservée. Dans une première catégorie (catégorie « A » de HIDAOKA) de ces lacs, la largeur est donnée par

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^p \left(1 + \frac{x}{a}\right)^q,$$

où p et q sont des nombres réels et positifs; on peut sans nuire à la généralité, supposer $p > q$. La seconde catégorie (la catégorie « B » de HIDAOKA) comprend les lacs de largeur

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2a}\right)^{p/2} \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2a}\right)^{q/2}.$$

Les figures 2 et 3 qui suivent représentent un certain nombre de lacs de chacune de ces deux catégories.

Quant à la profondeur, elle est prise tantôt constante ($h = h_0$), tantôt variable :

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); \quad h(x) = h_0 \left(1 \pm \frac{x}{a}\right).$$

Pour les lacs de la catégorie « A » de profondeur constante, l'équation de CHRYSTAL s'écrit (en posant comme d'habitude $x/a = x'$, $\lambda a^2 = \mu$)

$$\frac{d}{dx'} \left[(1 - x')^p (1 + x')^q \frac{d\zeta}{dx'} \right] + \mu (1 - x')^p (1 + x')^q \zeta = 0 \quad (45)$$

K. HIDAOKA calcule numériquement le cas $p = 1$, $q = 1/2$ et est obligé de tabuler la solution, celle-ci n'étant pas réductible à un type connu.

⁽⁴⁴⁾ HIDAOKA, K., *The Oscillations of Water in Canals of Asymmetric Plan*, Mem. Imper. Mar. Observ., V, 4 (1935), pp. 268-321.

⁽⁴⁵⁾ Il est à remarquer que cette équation n'est pas réductible à celle de JACOBI :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x)^p (1 + x)^q (1 - x) x \frac{du}{dx} \right] + \mu (1 - x)^p (1 + x)^q u = 0$$

qui, comme on le sait, admet pour solutions les polynômes de JACOBI d'ordre n : $u = F(p + n, -n, q; x)$, et comme valeurs propres $\mu = n(p + n)$, les conditions-frontière étant : $u(\pm 1) =$ quantité finie.

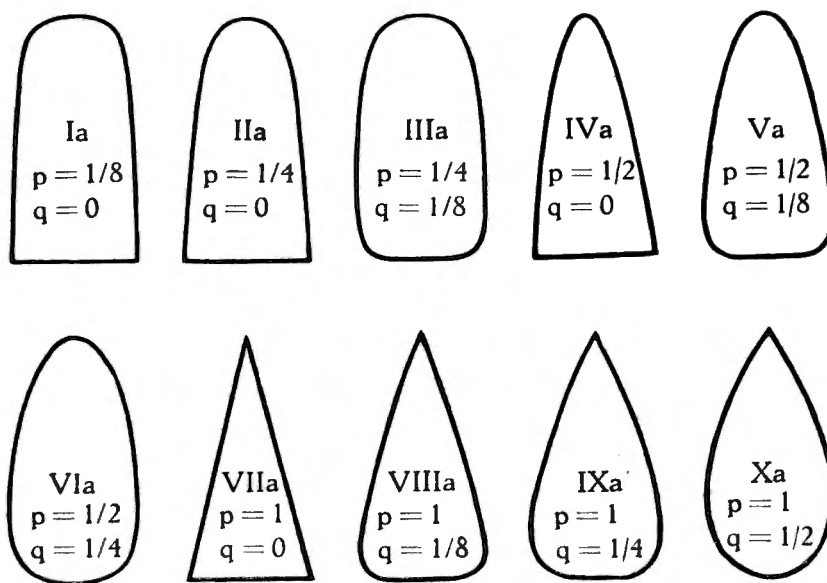


FIG. 2. — Lacs du type « A » de K. HIDAOKA.
[D'après l'article cité ci-contre, note 44.]

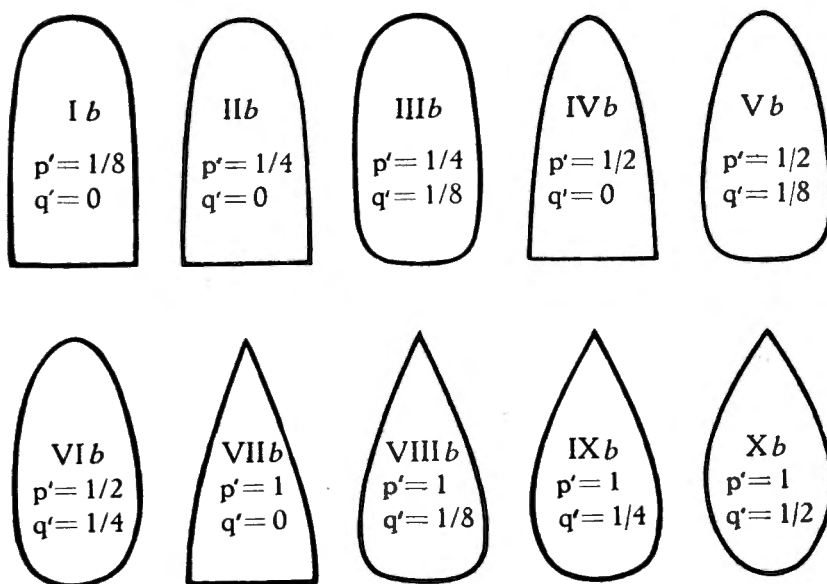


FIG. 3. — Lacs du type « B » de K. HIDAOKA.
[Même source.]

Le profil du mode fondamental est représenté par la figure 4 ci-dessous et la valeur propre correspondante est $\sqrt{\mu_1} = 2,030$. Le cas où p est quelconque et $q = 0$ est beaucoup plus aisé à traiter car il conduit à une équation de BESSEL; en effet, l'équation de CHRYSTAL s'écrit alors :

$$(1 - x')\zeta'' - p\zeta' + \mu(1 - x')\zeta = 0$$

et admet par conséquent pour solutions

$$\zeta = A(1 - x')^{-\frac{p-1}{2}} \cdot J_{\frac{p-1}{2}}[\sqrt{\mu}(1 - x')].$$

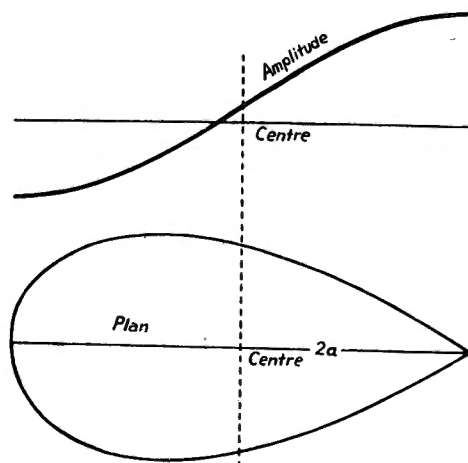


FIG. 4. — Lac du type X_q : $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$.
(Profondeur uniforme.)

Profil de la seiche uninodale. [D'après K. HIDAOKA, même article.]

La condition-frontière $\zeta'(1) = \zeta'(-1) = 0$ fournit les valeurs propres du paramètre μ , par l'équation

$$J_{\frac{p+1}{2}}(2\sqrt{\mu}) = 0,$$

car $\zeta'(1) = 0$ est déjà satisfait, et l'on a l'identité

$$\frac{d}{dz} [z^n J_{-n}(z)] = -z^n J_{1-n}(z),$$

d'où l'équation annoncée.

Si $p = 1$ et $q = 0$, on a un lac triangulaire, cas classique bien connu ⁽⁴⁶⁾, pour lequel $\zeta = J_0[\sqrt{\mu}(1 - x')]$, avec comme équation aux valeurs propres $J_1(\sqrt{\mu}) = 0$. On vérifie facilement, à partir des racines $\sqrt{\mu_k} = 3,8317, 7,0156, 10,173, \text{etc.}$ que $T_1 : T_2 : T_3 = 1 : 0,5461 : 0,3767, \text{etc.}$ Comme J_0 est maximum pour $x' = 1$, on en conclut que l'amplitude des crêtes et des creux de la seiche décroît à mesure qu'on s'éloigne de l'extrémité effilée du lac.

⁽⁴⁶⁾ Cf. BOUASSE, H., *op. cit.*, p. 157.

Pour p inférieur à 1, K. HIDAOKA donne les quelques résultats numériques (q restant nul) :

$$\begin{array}{ccc} p = 1/8 & 1/4 & 1/2, \\ \sqrt{\mu_1} = 1,614 & 1,654 & 1,745, \\ \sqrt{\mu_2} = 3,189 & 3,261 & 3,508. \end{array}$$

m) Si la profondeur varie comme

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right),$$

l'équation de CHRYSTAL prend à nouveau la forme hypergéométrique :

$$(1 - x'^2) \zeta'' + [(p - q) + (p + q + 2)x'] \zeta' + \mu \zeta = 0,$$

dont les solutions sont

$$\zeta = A \cdot F \left(-k, k + p + q + 1, p + 1; \frac{1 - x'}{2} \right)$$

et les valeurs propres $\mu_k = k(k + p + q + 1)$. Dans le mode fondamental, la surface libre de l'eau reste plane, comme le montre la figure 5 ci-dessous.

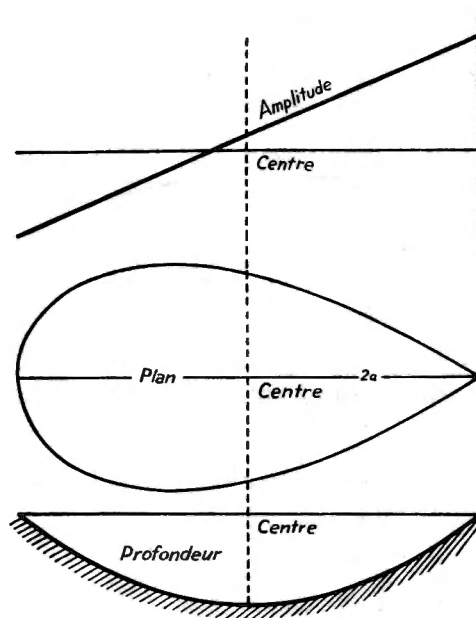


FIG. 5. — Lac du type X_a : $p = 1$, $q = 1/2$.

$$\text{Profondeur } h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Profil de la seiche uninodale. [D'après K. HIDAOKA, même article.]

n) Si le fond est un plan incliné relevé vers l'extrémité étroite,

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x}{a} \right),$$

les solutions ζ doivent se développer en séries potentielles (puissances paires et impaires) et l'équation aux valeurs propres s'obtient sous forme de fraction continue égalée à zéro.

A titre d'exemple, K. HIDAHA traite le cas $p = 1$, $q = 1/2$, et trouve pour le fondamental $\sqrt{\mu_1} = 1,865$. Le profil de la seiche est donné par la figure 6 ci-dessous.

Au cas où le fond plan incliné se relève vers l'extrémité large du lac,

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x}{a} \right),$$

l'équation de CHRYSTAL se traite comme dans le cas précédent; pour $p = 1$, $q = 1/2$, K. HIDAHA trouve $\sqrt{\mu_1} = 1,703$ (c'est-à-dire une période d'oscillation fondamentale plus longue); le profil de la seiche est donné par la figure 7.

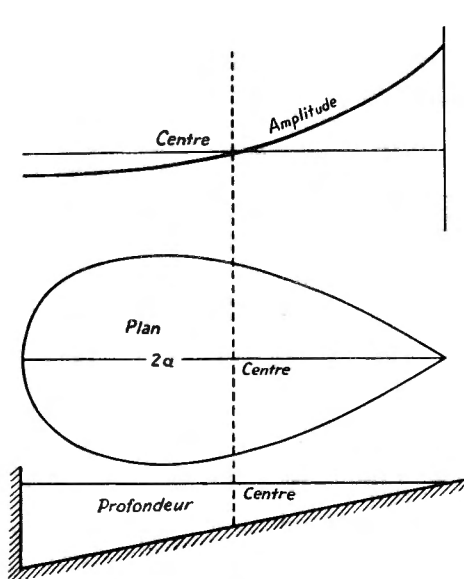


FIG. 6. — Lac du type X_a : $p = 1$, $q = 1/2$.

$$\text{Profondeur } h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x}{a} \right).$$

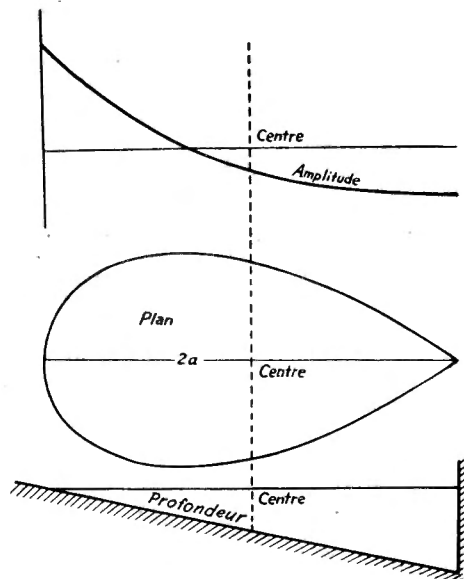


FIG. 7. — Lac du type X_a : $p = 1$, $q = 1/2$.

$$\text{Profondeur } h = h_0 \left(1 + \frac{x}{a} \right).$$

Profils des seiches uninodales. [D'après K. HIDAHA, même article.]

o) Parmi les lacs de la seconde catégorie (« B »), K. HIDAHA ne traite que le cas de la profondeur constante. Posant

$$1 - \sin \frac{\pi x}{2a} = 2x',$$

l'équation de CHRYSTAL devient :

$$x'(1-x')\zeta'' + \left[\frac{p'+1}{2} - \left(1 + \frac{p'+q'}{2} \right) x' \right] \zeta' + \frac{4\mu}{\pi^2} \zeta = 0.$$

Les solutions sont

$$\zeta = F \left(-k, k + \frac{p'+q'}{2}, \frac{p'+1}{2}; x' \right),$$

et les valeurs propres

$$\sqrt{\mu_k} = \frac{k\pi}{2} \left(1 + \frac{p'+q'}{2k} \right)^{1/2}.$$

Comme on a

$$\sqrt{\mu_k} = \frac{k\pi}{2}$$

pour le canal rectangulaire, on voit que les périodes d'oscillation du canal de catégorie « B » sont plus courtes que celles du canal rectangulaire de même longueur et s'en rapprochent à mesure que le nombre k de nœuds de la seiche croît. Ceci rejoint les conclusions d'une note de H. JEFFREYS sur les seiches d'ordre élevé dans les lacs étroits ⁽⁴⁷⁾.

p) Un grand nombre d'autres lacs aux formes les plus imprévues ont été étudiés par K. HIDAOKA et ses élèves; on trouvera un relevé de ces travaux dans la bibliographie donnée à la fin de cet ouvrage.

Les solutions auxquelles les auteurs aboutissent sont le plus souvent fort compliquées et, en tout cas, ne présentent en général qu'un intérêt pratique assez mince. Aussi n'entrerons-nous pas davantage dans le détail de ces questions et arrêterons-nous ici cette révision rapide des principaux cas aisément solubles de l'équation de CHRYSTAL, pour aborder l'étude des méthodes approchées de solution de cette équation.

CHAPITRE II.

LES MÉTHODES APPROCHÉES.

On a vu au chapitre précédent que l'équation de CHRYSTAL n'admet de solutions exactes que pour un nombre restreint de cas, que ceux-ci comprennent seulement les lacs dont la forme présente une certaine symétrie, et que même pour de tels lacs les solutions sont souvent compliquées. Aussi s'est-on depuis longtemps occupé de mettre au point des méthodes de calcul approché, permettant de résoudre numériquement l'équation de CHRYSTAL pour n'importe quel lac (pourvu seulement que le rapport de ses dimensions et sa configuration géographique et bathymétrique ne s'opposent pas à l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides).

Ces méthodes, que pour la facilité et conformément à l'habitude établie nous désignerons ici du nom des auteurs qui les ont proposées ou appliquées les premiers, ne sont le plus souvent que des adaptations, à l'équation différentielle dont il est question ici, de procédés d'intégration très généraux, connus depuis longtemps des mathématiciens.

On passera ainsi en revue successivement : une méthode variationnelle, deux méthodes « d'existence », une méthode utilisant l'analogie qui existe entre les oscillations d'un système mécanique et celles d'un circuit électrique, deux méthodes fondées sur la transformation d'une équation différentielle linéaire du second ordre en une équation intégrale, une méthode plus ou moins hybride mais qui se ramène pour l'essentiel à l'une de ces deux dernières; enfin, un procédé de correction applicable à la formule de MERIAN pour les golfes et baies.

⁽⁴⁷⁾ JEFFREYS, H., *On the More Rapid Longitudinal Seiches of a Narrow Lake*, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., Geoph. Supp., 1 (1928), pp. 495-500.

§ 1. LA MÉTHODE VARIATIONNELLE DE W. RITZ — K. HIDAKA.

La méthode bien connue de W. RITZ a été appliquée par K. HIDAKA ⁽⁴⁸⁾ à la résolution de l'équation de CHRYSTAL. Rappelons brièvement le procédé de W. RITZ, et, pour plus de clarté, raisonnons directement sur cette dernière équation.

On sait que l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0, \quad (\text{I.10})$$

sous les conditions $u(0) = u(a) = 0$, revient à minimiser l'intégrale

$$I = \int_0^a \left[u'^2 - \frac{\lambda}{\sigma(v)} u^2 \right] dv,$$

c'est-à-dire à annuler sa variation :

$$\delta I \equiv \delta \int_0^a \left[u'^2 - \frac{\lambda}{\sigma(v)} u^2 \right] dv = 0. \quad (\text{II.1})$$

En effet, l'équation d'EULER de ce dernier problème n'est autre que l'équation de CHRYSTAL (I.10). De là l'idée de W. RITZ : au lieu de résoudre l'équation (I.10) soumise aux conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$, il cherche pour (II.1) des solutions sous forme d'une combinaison linéaire de m fonctions $\psi_i(v)$, satisfaisant chacune aux conditions susdites. A cet effet, il pose

$$u(v) = \sum_{i=1}^m A_i \psi_i(v),$$

où les A_i sont des paramètres à déterminer. L'existence d'un tel système de fonctions $\psi_i(v)$, pour lesquelles on doit avoir (ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, et m un entier positif) :

$$|u(v) - \sum_{i=1}^m A_i \psi_i(v)| < \varepsilon, \quad |u' - \sum_{i=1}^m A_i \psi'_i(v)| < \varepsilon,$$

dans tout le domaine du problème, est garantie par un théorème de WEIERSTRASS ⁽⁴⁹⁾, et W. RITZ lui-même a indiqué la manière de former ces fonctions. Pour toutes les autres questions concernant la légitimité du procédé

⁽⁴⁸⁾ HIDAKA, K., *Application of Ritz's Variation Method to the Determination of Seiches in a Lake*, Mem. Imp. Mar. Obs., VI, 2 (1936), pp. 159-174.

⁽⁴⁹⁾ Cf. PLANCHEREL, M., *Sur la méthode d'intégration de Ritz*, Bull. Sc. Math., 58 (1923), pp. 376-412; voir la p. 377.

de RITZ, la convergence des valeurs propres etc., on se reportera à l'article de M. PLANCHEREL, cité dans la note 49.

Introduisant cette expression de $u(v)$ dans (II.1), il vient

$$\delta I \equiv \varepsilon \int_0^a \left[(\Sigma A_i \psi_i')^2 - \frac{\lambda}{\sigma(v)} (\Sigma A_i \psi_i)^2 \right] dv = 0, \quad (\text{II.2})$$

équation qui se réduit aux m équations suivantes :

$$\frac{\partial I}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial A_2} = 0 \dots \frac{\partial I}{\partial A_m} = 0,$$

c'est-à-dire à un système de m équations à m inconnues A_i ($i = 1, 2 \dots m$) dont la solution permet d'écrire l'approximation cherchée pour $u(v)$. Les équations $\partial I / \partial A_i = 0$ étant linéaires en A_j , et sans second membre, elles n'auront de solutions A_i non identiquement nulles que si leur déterminant, que nous écrirons $D|C_{ij} - \lambda E_{ij}|$, s'annule. (On a posé

$$\int_0^a \psi_i' \psi_j' dv = C_{ij} \quad \text{et} \quad \int_0^a \frac{\psi_i \psi_j}{\sigma(v)} dv = E_{ij},$$

i étant l'indice des rangées et j celui des colonnes.)

Ce déterminant peut être lui-même considéré comme une équation d'ordre m en λ , dont la solution fournira les valeurs propres et, par suite, les périodes d'oscillation cherchées. A chaque racine λ_k ($k = 1, 2 \dots m$) correspond un système de coefficients $A_1, A_2 \dots A_m$, et par conséquent une fonction $u_k(v)$.

Si, au lieu de partir de l'équation (I.10), nous partons de l'équation (I.11) c'est-à-dire

$$\frac{d^2 \zeta}{ds^2} + \lambda \sigma(s) \zeta = 0,$$

avec les conditions-frontière $\zeta'(0) = \zeta'(c) = 0$, l'intégrale à minimiser sera

$$J = \int_0^c [\zeta'^2 - \lambda \sigma(s) \zeta^2] ds; \quad (\text{II.1'})$$

et l'on écrira

$$\zeta(s) = \sum_{i=1}^m B_i \varphi_i(s),$$

les B_i étant maintenant les paramètres à déterminer.

Les équations résultant de l'annulation de la variation de J sont

$$\frac{\partial J}{\partial B_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

et la condition de comptabilité du système s'écrira $D|F_{ij} - \lambda G_{ij}| = 0$, où l'on

a posé

$$\int_0^c \varphi_i \varphi_j \sigma(s) ds = G_{ij} \quad \text{et} \quad \int_0^c \varphi_i' \varphi_j' ds = F_{ij}.$$

Le raisonnement général est donc en tous points identique à celui qui vient d'être fait pour l'équation (I.10).

K. HIDAOKA raisonne uniquement sur l'équation (I.10) et pose ⁽⁵⁰⁾

$$\psi_i(v) = \left(1 - \frac{v}{a}\right) \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^i,$$

ou, en écrivant v' pour v/a ,

$$\psi_i(v') = (1 - v') \cdot v'^i,$$

de manière à satisfaire immédiatement aux conditions-frontière $\psi_i(0) = \psi_i(a) = 0$. On vérifie également que pour cette forme particulière des ψ_i , les quantités C_{ij} et E_{ij} ne dépendent que de la somme $i + j$, de sorte que pour $m = 2$ il n'y a que trois intégrales C_{ij} et trois intégrales E_{ij} à calculer; pour $m = 3$, ce nombre est de cinq, pour $m = 4$, de sept, et ainsi de suite. Les intégrales C_{ij} s'obtiennent immédiatement sans aucune difficulté, puisque l'intégrande s'y réduit à un polynôme, tandis que les intégrales E_{ij} , dont l'intégrande contient $\sigma(v)$ en dénominateur, doivent être calculées par des procédés numériques. On a, en posant $i + j = n$ et $i \times j = r$:

$$C_{ij} = \int_0^a [(r + n + 1) v'^n - (2r + 3n + 4) v'^{n+1} + (r + 2n + 2) v'^{n+2}] dv,$$

$$E_{ij} = \int_0^a \frac{(1 - v')^2 v'^{n+2}}{\sigma(v)} dv.$$

Les fonctions $\psi_i(v)$ choisies par K. HIDAOKA présentent l'inconvénient de ne pas avoir leurs dérivées orthogonales entre elles, ce qui donnerait, pour des fonctions normées :

$$\int_0^a \psi_i' \psi_j' dv = 0 \text{ ou } 1 \text{ suivant que } i \neq j \text{ ou } i = j;$$

cette simple précaution permettrait, après division du déterminant-équation aux valeurs propres par λ^m (quantité non nulle !), de faire prendre à celui-ci la forme séculaire (la nouvelle inconnue étant $1/\lambda$), beaucoup plus maniable que celle dont tous les éléments sont des binômes du type $C_{ij} - \lambda E_{ij}$.

⁽⁵⁰⁾ HIDAOKA, K., *op. cit.*, p. 162.

Si l'on prend par exemple pour l'équation (II.2)

$$\psi_i(v) = \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \sin \frac{i\pi v}{a},$$

à quoi correspond, pour sa variante :

$$\varphi_i(s) = \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \cos \frac{i\pi v}{a},$$

on est assuré, non seulement d'avoir des dérivées orthogonales entre elles, mais encore, au cas où la fonction $\sigma(v)$ [ou $\sigma(s)$] ne présente pas une allure par trop capricieuse, de représenter en même temps le fondamental, et peut-être aussi le deuxième mode, d'une manière vraisemblablement plus correcte que par les polynômes proposés par K. HIDAKA. On sait en effet que les fonctions

$$u_k = \sin \frac{k\pi v}{a} \quad \text{et} \quad \zeta_k = \cos \frac{k\pi v}{a}$$

sont des solutions exactes pour un lac-canal de profondeur et de largeur constantes, alors que les polynômes de HIDAKA ne sont solutions exactes pour aucune forme simple de lac-canal.

Pour ce qui est du point de vue pratique, on sait que la méthode de W. RITZ, à cause du point de vue même où son auteur s'est placé (satisfaire d'abord aux conditions-frontière et ensuite seulement à l'équation qu'on s'efforce de résoudre), ne donne habituellement de bons résultats numériques que pour la valeur propre la plus basse, et qu'elle est inutilisable pour les valeurs propres d'ordre élevé.

Signalons aussi la propriété très importante que possèdent les valeurs propres approchées $\Lambda_1, \Lambda_2 \dots$ fournies par cette méthode de constituer des approximations par excès : on a toujours (en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, les valeurs propres exactes) $\Lambda_1 \geq \lambda_1, \Lambda_2 \geq \lambda_2 \dots$ etc.

La démonstration de cette propriété, qui repose sur le principe de maximum-minimum de R. COURANT, est donnée dans la plupart des traités classiques; il est donc superflu de la reprendre ici ⁽⁵¹⁾.

On sait encore que si l'on a obtenu des valeurs approchées $\Lambda_1 \dots \Lambda_m$ pour les m premières valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_m$ à partir d'une combinaison linéaire de m fonctions d'essai ψ_i , en posant

$$u = \sum_{i=1}^m A_i \psi_i$$

⁽⁵¹⁾ Cf. par exemple COURANT, R. und HILBERT, D., *Methoden der Math. Physik*, I, pp. 27 sqq; COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme und ihre Numerische Behandlung*, pp. 236 sqq.

et que si l'on adjoigne à ces dernières une fonction d'essai supplémentaire ψ_{m+1} de manière à poser maintenant

$$u = \sum_{i=1}^{m+1} \Lambda_i \psi_i,$$

les nouvelles valeurs approchées $\Lambda'_1 \dots \Lambda'_{m+1}$ des $m+1$ premières valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_{m+1}$ sont séparées par les m valeurs propres approchées $\Lambda_1 \dots \Lambda_m$ obtenues précédemment. On a donc

$$\Lambda'_1 \leq \Lambda_1 \leq \Lambda'_2 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda'_m \leq \Lambda_m \leq \Lambda'_{m+1}.$$

Les valeurs approchées Λ_i et Λ'_i étant toujours $\geq \lambda_i$ (valeurs propres exactes), on en conclut que les Λ'_i seront en général de meilleures approximations que les Λ_i , et qu'il suffirait en théorie de prendre m suffisamment élevé pour obtenir les valeurs propres du problème avec telle approximation que l'on voudrait. Malheureusement, le déterminant-équation aux périodes devient de moins en moins maniable à mesure que son ordre croît, ce qui limite considérablement l'intérêt pratique de cette dernière propriété des valeurs propres approchées.

Enfin, une limite inférieure pour une valeur propre quelconque λ_k peut être obtenue à l'aide du « quotient de TEMPLE », dès que l'on connaît pour la valeur propre λ_{k+1} , une limite inférieure $\lambda'_{k+1} > \lambda_k$ lui-même.

Cette dernière propriété n'est citée que pour mémoire et ne sera pas utilisée dans ce travail, pour des raisons pratiques ⁽⁵²⁾.

§ 2. LA MÉTHODE « D'EXISTENCE » DE A. DEFANT.

Au lieu de s'attaquer directement à l'équation de CHRYSTAL, A. DEFANT ⁽⁵³⁾ calcule, à l'aide des équations de continuité et du mouvement, les grandeurs $u(v)$, ξ et ζ ; la valeur propre inconnue λ est remplacée par une valeur d'essai λ' , qui sera considérée comme satisfaisante dès que $u(v)$, pris nul en $v=0$, prend une valeur suffisamment voisine de zéro au point $v=a$. L'équation de CHRYSTAL étant du type des équations de STURM-LIOUVILLE, l'existence de la solution

⁽⁵²⁾ Pour la théorie du « quotient de TEMPLE », cf. :

TEMPLE, G., *The Accuracy of Rayleigh's Method...*, Proc. Roy. Soc. London, Series A (Math. Phys. Sc.), 211 (1952), pp. 204-224;

COLLATZ, L., *Numer. Behndl. von Diffgl.*, pp. 172 sqq.

Pour les propriétés des valeurs Λ'_i et Λ_i , voir notamment :

PAULING, L. and WILSON, E. B., *Introduction to Quantum Mechanics*, pp. 186 sqq;

KEMBLE, E., *Fundamental Principles of Quantum Mechanics*, pp. 410 sqq.

⁽⁵³⁾ DEFANT, A., *Neue Methode zur Ermittlung der Eigenschwingungen (« Seiches ») von Abgeschlossenen Wassermassen*, Ann. Hydrographie, 46 (1918), pp. 78-85. Cet exposé est repris plusieurs fois dans les articles de P. CALOI et ses élèves, parus dans les Annali di Geofisica : cf. p. ex. 1 (1948), pp. 190-195; 2 (1949), pp. 267-280; 4 (1951), pp. 411-418, etc.

(d'où le nom donné ici à la méthode), est garantie par les théorèmes généraux relatifs à ce type d'équation ⁽⁵⁴⁾; étant donné par ailleurs la signification physique de l'équation (I.10), cette existence ne saurait faire de doute. Quant à la méthode elle-même, elle consiste à construire les solutions point par point, de manière à satisfaire partout aux équations de continuité et de mouvement, et par suite, à l'équation de CHRYSTAL, qui résulte de l'élimination de ζ entre celles-ci. Quant à la difficulté principale, celle de satisfaire simultanément aux deux conditions-frontière, elle est résolue par tâtonnements : on recommence les calculs jusqu'à ce que la solution essayée donne satisfaction sur ce dernier point.

Considérons l'équation de continuité

$$\zeta = -\frac{1}{b(x)} \frac{d}{dx} [S(x) \xi] \quad (\text{I.8})$$

et l'équation du mouvement

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (\text{I.9})$$

ou, puisque $\xi \sim e^{i\omega t}$,

$$\frac{d\zeta}{dx} = \lambda \xi \quad (\lambda = \omega^2/g). \quad (\text{I.9}')$$

Divisons le lac en n tronçons au moyen de n sections transversales S_j aux points $x = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$); soient Δx_j les portions d'axe Ox et Δv_j les portions de surface libre comprises entre les sections S_j et S_{j-1} ; u_j est le volume d'eau qui, en un quart de période d'oscillation (à savoir l'intervalle de temps qui s'écoule entre le passage de la surface libre par sa position d'équilibre et le moment où elle atteint sa dénivellation maximum) peut être considéré comme passant à travers la section S_j (supposée fixe). Les équations (I.8) et (I.9) deviennent alors respectivement

$$\zeta_{j-1} = -\frac{\Delta u_j}{\Delta v_j} \quad \text{et} \quad \lambda \xi_j = \frac{\Delta \zeta_j}{\Delta x_j}.$$

Puisque pour les ondes de grande longueur que sont les seiches étudiées, ζ varie très lentement avec x , on peut supposer constante la valeur de la dénivellation entre les deux sections S_{j-1} et S_j ; soit ζ_{j-1} cette valeur.

De cette manière, la surface de l'eau en oscillation est représentée par des gradins en nombre n .

Cette approximation sera naturellement d'autant plus exacte que les sections seront plus rapprochées, c'est-à-dire que n sera plus grand.

On peut encore raffiner le procédé en opérant comme suit : on prend d'abord ζ_1 constant de la première à la deuxième section et à l'aide de cette valeur on calcule successivement ξ_1 , $\Delta \zeta_2$ et ζ_2 ; on recommence ensuite le calcul en remplaçant ζ_1 par $\frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2)$; le $\Delta \zeta_2$ ainsi obtenu sera plus précis que le précédent;

⁽⁵⁴⁾ Cf. INCE, E. L., *Ordin. Differ. Equations*, chap. X, pp. 223 sqq.

il suffit de recommencer jusqu'à ce que le $\Delta\zeta_2$ ne change pratiquement plus. Néanmoins, il faut remarquer qu'à cause des erreurs de mesure inévitables sur Δv_j et Δx_j , l'amélioration obtenue par ce procédé d'itération pourra être illusoire et ne pas justifier le supplément de travail qui en résulte pour les calculs numériques. L'intégration numérique s'effectue en commençant par une valeur arbitraire ζ_0 attribuée à la dénivellation depuis le point $x = 0$ (rivage du lac) jusqu'au point $x = x_1$, c'est-à-dire dans le premier compartiment (compris entre la côte S_0 et la première section droite S_1). On calcule ensuite, de compartiment en compartiment, les grandeurs u_j , ξ_j , ζ_j selon le schéma :

$$\left. \begin{aligned} u_{j+1} &= u_j - \zeta_j \Delta v_{j+1}; \\ u_j &\equiv \sum_{i=1}^j \Delta u_i = - \sum_{i=1}^j \zeta_{i-1} \Delta v_i; \\ \xi_j &= u_j / S_j; \quad \Delta\zeta_j = \lambda \xi_j \Delta x_j; \\ \zeta_j &= \zeta_{j-1} + \Delta\zeta_j. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3})$$

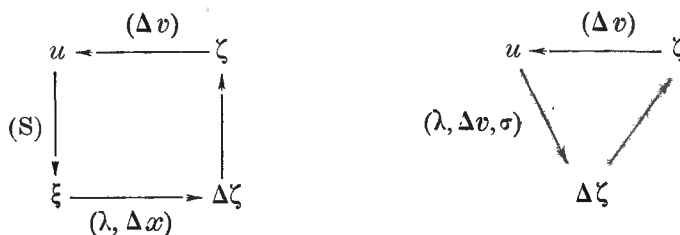
Ce schéma peut se simplifier comme suit, en observant que

$$\frac{d\zeta}{b(x) dx} \equiv \frac{d\zeta}{dv} = \frac{\lambda u}{\sigma(v)};$$

$$\left. \begin{aligned} u_{j+1} &= u_j - \zeta_j \Delta v_{j+1}; \\ u_j &= \sum_{i=1}^j \Delta u_i = - \sum_{i=1}^j \zeta_{i-1} \Delta v_i; \\ \Delta\zeta_j &= \lambda \frac{u_j}{\sigma_j} \Delta v_j; \\ \zeta_j &= \zeta_{j-1} + \Delta\zeta_j. \end{aligned} \right\}$$

Mais sous cette forme, les calculs ne fournissent plus la fonction auxiliaire ξ , dont on verra plus loin l'intérêt pour la vérification de l'orthogonalité des fonctions propres $u(v)$ obtenues (cf. pp. 98 sqq.).

Les enchaînements des calculs peuvent se représenter, respectivement pour la méthode de DEFANT et sa variante simplifiée, par les « circuits » suivants :



La condition-frontière $u(a) = 0$ sera remplie si l'on a

$$u_n \equiv \sum_{i=1}^n \zeta_{i-1} \Delta v_i = 0.$$

Habituellement, pour une valeur d'essai $\lambda = \lambda'$, cette condition n'est pas remplie exactement et l'on trouve $u_n \neq 0$. Dans ce cas, on recommence avec une nouvelle valeur d'essai λ'' ; des interpolations, effectuées sur les valeurs d'essai, conduisent ensuite rapidement à un résultat satisfaisant.

Le même procédé peut s'appliquer à l'équation (I.11), c'est-à-dire

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \lambda\sigma(s)\zeta = 0$$

[conditions-frontière : $\zeta'(0) = \zeta'(c) = 0$], préalablement décomposée en $\lambda u = d\zeta/ds$ (équation du mouvement) et $u = -\int_0^s \sigma(s)\zeta ds$ (équation de continuité).

Rappelons que la variable s est définie par la relation

$$s = \int_0^v \frac{dv}{\sigma(v)}$$

et que c est la valeur prise par s au point $v = a$:

$$c = \int_0^a \frac{dv}{\sigma(v)}$$

Les conditions-frontière peuvent donc s'écrire : $u(0) = u(c) = 0$.

Aux cinq relations (II.3) ci-dessus correspondent dès lors respectivement les cinq relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} u_{j+1} &= u_j - \zeta_j \sigma_{j+1} \Delta s_{j+1}; \\ u_j &= \sum_{i=1}^j \Delta u_i = - \sum_{i=1}^j \zeta_{i-1} \sigma_i \Delta s_i; \\ \xi_j &= u_j / S_j; \quad \Delta \zeta_j = \lambda u_j \Delta s_j; \\ \zeta_j &= \zeta_{j-1} + \Delta \zeta_j, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3}')$$

dont la troisième ne sera pas utilisée dans les calculs.

Ainsi qu'on l'a signalé plus haut (cf. p. 26), il faut s'attendre à un léger désaccord entre les résultats obtenus par la méthode de DEFANT appliquée à l'équation (I.10) (schéma II.3) et ceux fournis par l'équation (I.11) (schéma II.3'). Cela tient essentiellement à ce que $b(x)\Delta x$ n'est égal à Δv que si l'on prend un $b(x)$ moyen, défini par $\Delta v / \Delta x$, qu'on écrira désormais $\beta(x)$; or, pour la construction de la courbe normale, $b(x)$ est habituellement mesuré au même point que $S(x)$ — ainsi qu'il est naturel à première vue de le faire; — du point de vue théorique, l'anomalie n'est pas plus grave que celle qui consiste à remplacer des différentielles par des différences finies. Pour faire disparaître le désaccord en question, il suffit évidemment de remplacer $\sigma(x)$ [défini par la relation $\sigma(v) = S(v) b(x)$] par $\tau(v) = S(v) \beta(v)$, c'est-à-dire de faire usage de la courbe normale « corrigée ». Nous avons vu plus haut ce qu'il faut penser de cette courbe corrigée (cf. pp. 25-26).

La méthode est encore applicable à la recherche des seiches dans un golfe ou une baie à large embouchure, à condition de remarquer que la condition-

frontière à l'embouchure est $\zeta = 0$; c'est la masse d'eau u_0 qui traverse l'embouchure (S_0) pendant un quart de période qui sera choisie arbitrairement. Le schéma du calcul numérique est analogue en tous points à celui donné ci-dessus. J. GOLDBERG ⁽⁵⁵⁾, qui, semble-t-il, a le premier utilisé cette variante de la méthode de DEFANT pour le calcul des oscillations libres dans les golfes et les baies, y apporte une légère modification : au lieu de sommer u_j par rectangles (comme le fait DEFANT) il préfère opérer par trapèzes, ce qui le conduit à écrire :

$$u_{j+1} = u_j - \frac{1}{2} (\zeta_j + \zeta_{j+1}) \Delta v_{j+1},$$

d'où, pour la condition-frontière en $v = a$:

$$u_n = u_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\zeta_i + \zeta_{i+1}) \Delta v_{i+1} = 0.$$

Cette intégration par trapèzes pourra être préférable si le nombre de sections droites est assez réduit.

Remarquons encore pour terminer que ces méthodes d'existence, quel que soit du reste le procédé d'intégration utilisé, sont extrêmement commodes pour les calculs à la machine. Le caractère quelque peu rudimentaire des procédés d'intégration mis en œuvre dans ces diverses méthodes se justifie si l'on remarque que les Δx_j (mesurés le long du Talweg, c'est-à-dire le long d'une ligne assez mal définie), les Δv_j (mesurés sur une carte, au planimètre ou par des procédés moins précis) et surtout les S_j , sont des données entachées d'erreurs de mesure qui peuvent atteindre plusieurs pour cent (que l'on songe à la part d'arbitraire inévitable que comportent les rognages éventuels ! cf. p. 91); cela n'aurait donc pas beaucoup de sens de recourir à des procédés d'intégration raffinés lorsque l'on ne possède que des données d'une précision médiocre.

§ 3. LES MÉTHODES DE W. E. MILNE.

a) Au lieu de procéder comme pour la méthode d'existence de A. DEFANT, qui utilise en chaîne l'équation de continuité (I.8) et l'équation du mouvement (I.9), on peut aussi s'attaquer directement à l'équation de CRYSTAL (I.10), à l'aide de formules donnant d^2u/dv^2 en fonction de valeurs prises par la fonction u en divers points voisins, et de Δv (pris constant) comme par exemple ⁽⁵⁶⁾ :

$$u_n'' = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \frac{1}{12} \Delta v^2 u_n^{IV} + \dots$$

⁽⁵⁵⁾ GOLDBERG, J., *Zur Berechnung der freien Schwingungen von Meeresbuchten*, Ann. der Hydrogr., 65 (1937), pp. 419-422.

⁽⁵⁶⁾ Cf. MILNE, W. E., *Numerical Calculus*, Princeton (N. J.), 1949, pp. 138 sqq.

Dans cette formule, on peut, en première approximation, négliger le terme en u_n^{IV} , ce qui conduit à la relation

$$u_n'' = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

dont on élimine la dérivée seconde à l'aide de l'équation de CHRYSTAL elle-même; on obtient ainsi :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + \frac{\lambda \Delta v^2}{\sigma_n} u_n = 0. \quad (\text{II.4})$$

On peut aussi itérer la formule, ce qui donne

$$u_n^{IV} = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') - \frac{1}{12} \Delta v^2 u_n^{VI} + \dots$$

$$u_n^{VI} = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1}^{IV} - 2u_n^{IV} + u_{n-1}^{IV}) - \frac{1}{12} \Delta v^2 u_n^{VIII} + \dots \text{ etc.}$$

Introduisons cette valeur de u_n^{IV} dans l'équation ci-dessus : il vient

$$u_n'' = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \frac{1}{12} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') + \frac{1}{144} \Delta v^4 u_n^{VI} + \dots$$

Éliminons les u'' à l'aide de l'équation de CHRYSTAL et négligeons le terme u_n^{VI} : il reste

$$u_{n+1} \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n+1}} \right) - u_n \left(2 - \frac{10 \lambda \Delta v^2}{12 \sigma_n} \right) + u_{n-1} \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n-1}} \right) = 0. \quad (\text{II.5})$$

Introduisons ensuite u_n^{VI} dans l'expression donnant u_n^{IV} : il vient comme précédemment

$$u_n^{IV} = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') - \frac{1}{12} (u_{n+1}^{IV} - 2u_n^{IV} + u_{n-1}^{IV}) + \frac{1}{144} \Delta v^4 u_n^{VIII} + \dots$$

relation dont on peut à nouveau éliminer les u^{IV} ; on obtient ainsi :

$$u_n^{IV} = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') - \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+2}'' - 2u_{n+1}'' + u_n'') - \dots - \frac{2}{\Delta v^2} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') + \dots + \frac{1}{\Delta v^2} (u_n'' - 2u_{n-1}'' + u_{n-2}'') - \dots \right\}.$$

Introduisons cette dernière égalité dans la relation donnant u_n'' : il vient

$$u_n'' = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \frac{1}{12} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') + \frac{1}{144} \left\{ (u_{n+2}'' - 2u_{n+1}'' + u_n'') - \dots - 2(u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') + \dots + (u_n'' - 2u_{n-1}'' + u_{n-2}'') - \dots \right\}.$$

Éliminons encore les dérivées secondes à l'aide de l'équation de CHRYSTAL elle-même : il reste

$$-\frac{\lambda \Delta v^2 u_n}{\sigma_n} = (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \frac{\lambda \Delta v^2}{12} \left(\frac{u_{n+1}}{\sigma_{n+1}} - \frac{2u_n}{\sigma_n} + \frac{u_{n-1}}{\sigma_{n-1}} \right) \\ + \frac{\lambda \Delta v^2}{144} \left(-\frac{u_{n+2}}{\sigma_{n+2}} + \frac{16u_{n+1}}{\sigma_{n+1}} - \frac{30u_n}{\sigma_n} + \frac{16u_{n-1}}{\sigma_{n-1}} - \frac{u_{n-2}}{\sigma_{n-2}} \right),$$

relation entre cinq valeurs (d'abscisses équidistantes entre elles) de la fonction $u(v)$, comparable à ce point de vue à la relation que l'on obtient en éliminant u^{IV} au moyen de la relation bien connue (57)

$$u_n^{\text{IV}} = \frac{1}{\Delta v^4} (u_{n+2} - 4u_{n+1} + 6u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}) - \frac{\Delta v^2}{6} u_n^{\text{VI}} + \dots$$

En effet, cette relation permet d'écrire

$$u_n'' = \frac{1}{12 \Delta v^2} (-u_{n+2} + 16u_{n+1} - 30u_n + 16u_{n-1} - u_{n-2}).$$

L'inconvénient pratique des formules « à cinq points » (et davantage) est qu'elles nécessitent des précautions spéciales pour les valeurs de départ; ces valeurs doivent être calculées avec grande précision, sans quoi les solutions auxquelles elles conduisent peuvent s'écarter rapidement des solutions correctes, de sorte que le supplément de précision auquel on pouvait s'attendre n'est pas atteint, malgré les calculs beaucoup plus longs nécessités par ces formules.

C'est pourquoi on s'en tiendra ici aux deux formules

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} - \frac{\lambda \Delta v^2}{\sigma_n} u_n; \quad (\text{II.4})$$

$$\left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n+1}} \right) u_{n+1} = \left(2 - \frac{10 \lambda \Delta v^2}{12 \sigma_n} \right) u_n - \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n-1}} \right) u_{n-1}. \quad (\text{II.5})$$

Pour le calcul numérique à l'aide de ces formules, on se donne arbitrairement une valeur initiale u_1 ; en vertu de la première condition-frontière, $u_0 = 0$. On dispose ainsi de deux valeurs de départ pour lesquelles aucune correction n'est nécessaire et à l'aide desquelles on peut trouver successivement u_2 , u_3 , etc.

Pour la valeur propre λ , on choisit une valeur d'essai; celle-ci sera considérée comme satisfaisante lorsque la seconde condition-frontière $u(a) = 0$ sera remplie avec une approximation suffisante; tant que cette condition n'est pas remplie, on ajuste λ et on recommence les essais.

Un inconvénient relatif de la présente manière de procéder provient de la nécessité de prendre Δv constant.

En effet, s'il est facile, sur la carte d'un lac, de pratiquer des sections $S(x)$ équidistantes sur le Talweg, c'est-à-dire de prendre Δx constant, il est plus compliqué de prendre

(57) Cf. COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme...*, p. 272.

Δv constant, à cause des irrégularités du contour, d'autant plus que le Talweg n'est en général pas rectiligne : les portions de surface libre seront donc en général des polygones ayant pour côtés deux segments de droite (les traces des sections droites) orthogonaux au Talweg et deux arcs de courbe (les rives du lac). On voit la difficulté pratique qu'il y aurait à ajuster ces sections droites (non parallèles en général !) de manière à conserver un Δv constant.

On peut évidemment tourner la difficulté en construisant une table de mesures pour v et $\sigma(v)$, puis en interpolant des valeurs de $\sigma(v)$ d'abscisses équidistantes, à l'aide de formules d'interpolation plus ou moins raffinées. C'est ce qui sera fait à titre expérimental pour le lac de Genève (cf. pp. 103-108); on se contentera d'une interpolation linéaire : le but de ces calculs n'est pas tant de retrouver avec précision les résultats obtenus par la méthode de DEFANT, que de montrer comment les deux formules utilisées conduisent en fait à des fonctions propres $u(v)$ et à des valeurs propres λ tellement voisines qu'il devient difficile de dire laquelle des deux est la « meilleure ». Ceci paraît justifier l'emploi de la première formule d'approximation (II.4) (où l'on néglige le terme en u^{IV}), constamment utilisée dans la seconde partie de ce travail (consacrée au calcul des seiches transversales).

Si au lieu d'employer l'équation de CHRYSTAL sous sa forme habituelle, on l'écrit sous sa forme transformée

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \lambda\sigma(s)\zeta = 0, \quad (\text{I.11})$$

avec les conditions-frontière $\zeta'(0) = \zeta'(c) = 0$, et les notations :

ζ = dénivellation verticale (« hauteur » de la seiche),

$$s = \int_0^x \frac{dx}{S(x)} = \int_0^v \frac{dv}{\sigma(v)},$$

ou encore, si l'on veut, en différences finies, un accord rigoureux avec les résultats numériques obtenus pour l'équation écrite sous sa forme habituelle :

$$s = \int_0^v \frac{dv}{\tau(v)}, \quad \text{avec} \quad \tau(v) = S(x)\beta(x),$$

$$\beta(x) = \frac{\Delta x}{\Delta v} \quad (\text{largeur moyenne du compartiment considéré}), \quad \text{et} \quad c = \int_0^a \frac{dv}{\tau(v)},$$

la difficulté reste la même, puisque dans ce cas il faut prendre Δs constant, ce qui oblige à prendre Δx tel que son quotient par $S(x)$, section droite clôturant le compartiment, soit constant.

b) Un procédé plus raffiné consiste en l'emploi alternatif de deux formules pour la résolution de l'équation du second degré (I.10) ⁽⁵⁸⁾.

La première de ces formules, dite « formule de prédiction », sert à trouver une première approximation de la fonction cherchée, au point considéré, et ce à l'aide des valeurs

(58) Cf. MILNE, W. E., *op. cit.*, pp. 88 sqq.

de la fonction en des points voisins; la seconde formule, dite « formule de correction », intervient ensuite pour améliorer cette approximation. Le procédé est répété jusqu'au moment où l'ordre de grandeur des corrections ainsi apportées atteint celui des erreurs d'arrondissement que comporte la marche des calculs.

On peut construire des couples de formules plus ou moins raffinées; toutes comportent des termes où interviennent des dérivées d'ordre supérieur, que l'on néglige habituellement, commettant ainsi ce qu'on appelle une « erreur de troncature ». L'étude de cette erreur est particulièrement intéressante si l'on veut se rendre compte de la valeur des formules utilisées.

Examinons ici, à titre d'exemple, le couple de formules préconisé par W. E. MILNE, *op. cit.*, *loc. cit.*

Formule de prédiction :

$$y_{n+1} - 2y_{n-1} + y_{n-3} = 4\Delta x^2 (y''_{n-1} + \frac{1}{3}\delta^2 y''_{n-1}) + \frac{16}{240}\Delta x^6 y^{VI}(s),$$

et formule de correction :

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \Delta x^2 (y''_n + \frac{1}{12}\delta^2 y''_n) - \frac{1}{240}\Delta x^6 y^{VI}(t).$$

Les erreurs de troncature respectives de ces deux formules sont donc :

$$E_1 = \frac{16}{240}\Delta x^6 y^{VI}(s) \quad (\text{avec } x_{n-3} < s < x_{n+1}),$$

et

$$E_2 = -\frac{1}{240}\Delta x^6 y^{VI}(t) \quad (\text{avec } x_{n-1} < t < x_{n+1}).$$

La correction C_0 apportée par l'application de la seconde formule a donc pour expression $E_2 - E_1$, c'est-à-dire :

$$C_0 = -\frac{1}{240}\Delta x^6 y^{VI}(t) - \frac{16}{240}\Delta x^6 y^{VI}(s) = -\frac{17}{240}\Delta x^6 y^{VI}(r),$$

avec $x_{n-3} < r < x_{n+1}$ (y^{VI} étant supposée continue).

$$\text{On a} \quad E_2 - \frac{C_0}{17} = \frac{\Delta x^6}{240} [y^{VI}(r) - y^{VI}(t)]$$

et par suite, si l'on suppose l'existence d'une dérivée septième bornée $|y^{VII}| < M$:

$$E_2 - \frac{C_0}{17} = \frac{\Delta x^6}{240} y^{VII}(u) \cdot (r - t) \quad \text{avec } u \text{ compris entre } r \text{ et } t,$$

$$\text{d'où} \quad \left| E_2 - \frac{C_0}{17} \right| < \frac{\Delta x^6}{240} M |r - t| < \frac{\Delta x^7}{60} M,$$

puisque $|r - t| < 4\Delta x$.

Par conséquent, $E_2 = \frac{C_0}{17}$, avec une erreur de l'ordre de $\frac{\Delta x^7}{60}$.

Cette formule permet de suivre l'erreur de troncature à chaque pas; elle ne devient notablement inexacte que si la dérivée septième devient grande, c'est-à-dire si C_0 lui-même, qui est égal à $-17\Delta x^6 y^{VI}(r)/240$, change rapidement. On est donc averti par le fait même.

RECHERCHE DE LA LOI DE PROPAGATION DES ERREURS DE TRONCATURE PAS À PAS.

Désignons par e_n l'erreur qui entache y_n du fait de l'emploi des formules approchées de prédiction et de correction.

Comme la valeur retenue finalement pour y_n s'obtient par la formule de correction, c'est sur cette dernière que portera le raisonnement.

Appelons y la valeur calculée et z la valeur exacte de la fonction cherchée, solution d'une équation différentielle linéaire $y'' = f(x, y)$. On a donc

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \Delta x^2 (y''_n + \frac{1}{12} \delta^2 y''_n),$$

$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} = \Delta x^2 (z''_n + \frac{1}{12} \delta^2 z''_n) + E_n,$$

où l'on a posé

$$-\frac{1}{240} \Delta x^6 y^{VI}(t) = E_n \quad (x_{n-1} < t < x_{n+1}),$$

ou, à cause de l'équation différentielle :

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \Delta x^2 [f(x_n, y_n) + \frac{1}{12} \delta^2 f(x_n, y_n)],$$

$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} = \Delta x^2 [f(x_n, z_n) + \frac{1}{12} \delta^2 f(x_n, z_n)] + E_n.$$

Appelons e_n l'erreur $y_n - z_n$. Il vient ainsi, par soustraction :

$$e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} = \Delta x^2 [f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n) + \frac{1}{12} \delta^2 f(x_n, y_n) - \frac{1}{12} \delta^2 f(x_n, z_n)] - E_n.$$

Le théorème de la moyenne donne

$$f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n) = (y_n - z_n) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_n, y}$$

(avec y compris entre y_n et z_n).

Posons $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_n, y} = g_n$. On obtient ainsi :

$$e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} = \Delta x^2 [e_n g_n + \frac{1}{12} e_{n+1} g_{n+1} - \frac{2}{12} e_n g_n + \frac{1}{12} e_{n-1} g_{n-1}] - E_n$$

ou

$$\left(1 - \frac{1}{12} g_{n+1} \Delta x^2\right) e_{n+1} - \left(2 + \frac{5}{6} g_n \Delta x^2\right) e_n + \left(1 - \frac{1}{12} g_{n-1} \Delta x^2\right) e_{n-1} = -E_n.$$

En général g_n et E_n varient avec n ; si leur variation est lente, on peut se faire une idée du comportement de l'erreur e_n en traitant g_n et E_n comme des constantes, que l'on écrira g et E .

Posons encore

$$\frac{2 + 5g \Delta x^2 / 6}{1 - g \Delta x^2 / 12} = 2P, \quad \frac{E}{1 - g \Delta x^2 / 12} = L;$$

on peut alors écrire

$$e_{n+1} - 2P e_n + e_{n-1} = -L,$$

dont l'équation caractéristique s'écrit

$$r^2 - 2rP + 1 = 0.$$

α) Les racines r_1 et r_2 de cette équation seront réelles si $P^2 > 1$, c'est-à-dire si

$$\Delta x^2 > -\frac{6}{g},$$

et l'on a alors

$$e_n = A r_1^n + B r_2^n - \frac{E}{g \Delta x^2}.$$

Si $g > 0$ (cas $\alpha-1$), l'inégalité a toujours lieu.

Les racines étant inverses l'une de l'autre, il y a une racine supérieure en module à l'unité, de sorte que le module de l'erreur croît exponentiellement avec n .

Si $g < 0$ (cas $\alpha-2$), il faut

$$\Delta x > \sqrt{-\frac{6}{g}};$$

le comportement de l'erreur est identique à celui du cas ($\alpha-1$).

β) Si $P^2 = 1$, il y a une racine double et l'on a

$$e_n = A r_1^n + B n r_1^n - \frac{E}{g \Delta x^2}.$$

Comme $|r_1| = 1$, le module de l'erreur croît linéairement avec n .

γ) Enfin, si $P^2 < 1$, les racines de l'équation caractéristique sont complexes, et l'on a

$$e_n = A \sin(n \arccos P) + B \cos(n \arccos P) + \frac{E}{g \Delta x^2}$$

c'est-à-dire que l'erreur est oscillante, de signe variable.

Les constantes A et B se calculent à l'aide des valeurs e_0 et e_1 ⁽⁵⁹⁾.

⁽⁵⁹⁾ Pour une discussion plus détaillée, cf. SERVAIS, F., *Sur l'estimation des erreurs dans l'intégration numérique des équations différentielles linéaires du second ordre*, Ann. Soc. Scient. Brux., 70 (1956), pp. 5 sqq.

On peut facilement voir que les conclusions du cas γ s'appliquent à l'équation de G. CHRYSTAL, résolue directement comme équation différentielle du second ordre au moyen des formules de différences finies de la page 62. En effet, l'équation peut s'écrire

$$u'' = -\frac{\lambda u}{\sigma(v)}$$

(avec la variable indépendante v) ou encore

$$u'' = -\frac{\lambda u}{p(x)}$$

[avec la variable indépendante x ; on a posé $p(x) = S(x)/\beta(x)$].

Comme $\sigma(v)$ et $p(x)$, ainsi que λ , sont des quantités essentiellement positives, l'expression appelée g ci-dessus, c'est-à-dire ici $-\lambda/\sigma(v)$ ou $-\lambda/p(x)$, reste constamment négative, et par suite, l'erreur peut être toujours rendue oscillante.

Si l'on prend

$$\Delta x^2 y_n'' = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1},$$

le terme négligé dans le membre de droite étant $-\frac{1}{12} \Delta x^4 y_n''''$, on peut écrire, dans le cas de l'équation de CHRYSTAL (variable indépendante x)

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = -\frac{\lambda \Delta x^2}{p_n} u_n.$$

On en tire à nouveau

$$e_{n+1} - 2m_n e_n + e_{n-1} = -E_n,$$

où l'on a posé

$$1 - \frac{\lambda \Delta x^2}{2p_n} = m_n.$$

Comme λ et p_n sont positifs, on a bien $m_n < 1$. Si l'on traite E_n et m_n comme pratiquement constants, on a

$$e_n = A \sin(n \text{ arc cos } m) + B \cos(n \text{ arc cos } m) - \frac{pE}{\lambda \Delta x^2},$$

c'est-à-dire que l'erreur oscille avec n et est de signe variable (le dernier terme est petit, de l'ordre de $\Delta x^2 z''''$). Le cas de l'équation à variable indépendante v conduit au même résultat.

Montrons maintenant que ces conclusions s'étendent également aux résultats que l'on obtient par la méthode de DEFANT.

Rappelons le schéma de la méthode :

$$\zeta = -\frac{\Delta u}{\Delta v} \quad (\text{équation de conservation}),$$

$$\frac{\Delta \zeta}{\Delta x} = \frac{\lambda u}{S} \quad (\text{équation du mouvement}),$$

ou, afin d'avoir dans les deux équations la même variable indépendante :

$$\frac{\Delta \zeta}{\Delta v} = \frac{\lambda u}{S\beta} = \frac{\lambda u}{\tau(v)} \quad (\text{posé}).$$

On en tire, en écrivant les indices :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_{n+1}; \quad \Delta u_{n+1} = -\zeta_n \Delta v_{n+1}; \quad \zeta_n = \zeta_{n-1} + \frac{\lambda u_n}{\tau_n} \Delta v_n = \zeta_{n-1} + \Delta \zeta_n.$$

Dès lors :

$$u_{n+1} = u_n - \zeta_n \Delta v_{n+1} = u_n - \left(\zeta_{n-1} + \frac{\lambda u_n}{\tau_n} \Delta v_n \right) \Delta v_{n+1},$$

ou, en supposant constants les intervalles Δv :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n - \frac{\lambda u_n}{\tau_n} \Delta v^2 = u_n + (u_n - u_{n-1}) - \frac{\lambda u_n}{\tau_n} \Delta v^2.$$

A cause de l'équation de G. CHRYSTAL (qui résulte de l'élimination de ζ entre les équations du mouvement et de la conservation) on a enfin

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = - \frac{\lambda u_n}{\tau_n} \Delta v^2.$$

L'emploi de la méthode de DEFANT revient donc, au point de vue de la propagation de l'erreur de troncature, à l'utilisation de la formule simplifiée $\Delta x^2 u_n'' = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$; son succès est dû au comportement exceptionnellement favorable de l'erreur, qui se propage de manière oscillante (et non de manière exponentielle croissante, comme cela aurait lieu si p_n et λ — ou, ce qui revient au même, σ_n et λ — étaient de signe opposé !).

Le même raisonnement peut se faire pour le cas où l'on prend x comme variable indépendante dans les équations du mouvement et de la conservation (il suffit de remarquer que β est supposé très peu variable en x , conformément à l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides, sous-jacente à toute la théorie de l'équation de CHRYSTAL).

Examinons encore, pour terminer, le cas de la formule approchée :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - \frac{1}{12} h^2 (u_{n+1}'' + 10u_n'' + u_{n-1}'') + \frac{1}{240} h^6 u_n^{VI} + \dots = 0$$

utilisée dans certains calculs de vérification effectués sur le lac de Genève (cf. pp. 106-108). On a, avec les notations habituelles (u = valeur calculée de la fonction propre; z = valeur exacte de celle-ci; s = valeur intermédiaire de la variable indépendante, comprise entre les valeurs des points extrêmes considérés, d'indices $n-1$ et $n+1$) :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - \frac{1}{12} \Delta v^2 (u_{n+1}'' + 10u_n'' + u_{n-1}'') = 0,$$

$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} - \frac{1}{12} \Delta v^2 (z_{n+1}'' + 10z_n'' + z_{n-1}'') + \frac{1}{240} \Delta v^6 z^{VI}(s) = 0,$$

d'où, par soustraction

$$e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} + \frac{1}{12} \Delta v^2 \left(\frac{\lambda}{\sigma_{n+1}} e_{n+1} + \frac{10\lambda}{\sigma_n} e_n + \frac{\lambda}{\sigma_{n-1}} e_{n-1} \right) - E_n = 0,$$

ou

$$e_{n+1} \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n+1}} \right) - 2e_n \left(1 - \frac{10\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_n} \right) + e_{n-1} \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n-1}} \right) = E_n.$$

Moyennant l'hypothèse simplificatrice déjà utilisée précédemment (cf. p. 66) (c'est-à-dire σ_n et E_n « peu variables » avec n , et pris égaux à des constantes σ et E), on peut écrire :

$$e_{n+1} - 2Pe_n + e_{n-1} = -L,$$

avec

$$P = \frac{1 - 10\lambda\Delta v^2/12\sigma}{1 + \lambda\Delta v^2/12\sigma} < 1, \quad L = -\frac{\Delta v^6 z^{VI}/240}{1 + \lambda\Delta v^2/12\sigma}.$$

L'équation fonctionnelle de l'erreur est identique (aux constantes P et L près) à celle de la page 66, on pourra donc une fois de plus appliquer les conclusions précédentes, à savoir que l'erreur e_n est oscillante et de signe variable :

$$e_n = A \sin(n \text{ arc cos } P) + B \cos(n \text{ arc cos } P) - \frac{2}{3} \frac{\sigma E}{\lambda \Delta v^2}.$$

C'est donc toujours sur ce comportement particulier de l'erreur que repose le succès de la méthode considérée.

§ 4. LA MÉTHODE DES NŒUDS DE K. HIDAKA.

Cette méthode, proposée en 1932 par K. HIDAKA ⁽⁶⁰⁾, constitue également une méthode d'existence, moins pratique que celle de DEFANT, mais que nous décrirons cependant pour mémoire.

Elle consiste essentiellement à intégrer numériquement l'équation (I.10) de CHRYSTAL, à l'aide d'une valeur d'essai de λ , et à déterminer la position du nœud (ou des nœuds) de la seiche en partant successivement de chacune des deux extrémités du lac. La valeur d'essai de λ sera considérée comme satisfaisante si les nœuds occupent les mêmes positions dans les deux cas.

Pour intégrer (I.10), HIDAKA la décompose (formellement) en les deux équations simultanées :

$$\frac{du}{dv} = w, \quad \frac{dw}{dv} = -\frac{\lambda u}{\sigma(v)}.$$

Comme $\sigma(v)$ s'annule seulement aux points $v=0$ et $v=a$, l'auteur pose

$$\sigma(v) = H \cdot \frac{v}{a} \left(1 - \frac{v}{a}\right) \Phi\left(\frac{v}{a}\right),$$

ou, en changeant de variable ($v/a = z$) :

$$\sigma(z) = H \cdot z(1-z)\Phi(z),$$

expression dans laquelle H est une constante et $\Phi(z)$ une fonction à déterminer.

⁽⁶⁰⁾ HIDAKA, K., *A Practical Method of Integrating Chrystal's Seiche Equations*, Geophys. Magaz., Tokyo, 5 (1932), pp. 273-281.

Cette fonction $\Phi(z)$ ne s'annule jamais dans l'intervalle $0 \leq z \leq 1$; aux extrémités, on lui attribue les valeurs $\Phi(0) = 1$, $\Phi(1) = \alpha > 0$. HIDAOKA pose alors $\Phi(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots$ ce qui donne $1 + c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots = \alpha$. Au voisinage de $z = 0$, $\Phi(z)$ est donc égal à $1 + 0(z)$, et par suite $\sigma(z) = H \cdot z + 0(z^2)$; au voisinage de $z = 1$, $\Phi(z) = \alpha + 0(1-z)$ et $\sigma(z) = \alpha H(1-z) + 0(1-z^2)$.

Les constantes $c_1, c_2 \dots c_n$ se déterminent par la méthode des moindres carrés.

Pour l'intégration des équations simultanées (système équivalent à l'équation de CHRYSTAL), HIDAOKA préconise la méthode numérique de RUNGE-KUTTA, dont on trouvera la description dans les ouvrages de calcul numérique ⁽⁶¹⁾.

Ainsi, la « méthode des nœuds » apparaît notablement plus compliquée que celle de A. DEFANT; l'on ne voit guère l'intérêt qu'il y a à rendre $\sigma(v)$ analytique, d'autant moins que ces calculs préliminaires seront certainement longs, et que l'accord entre la courbe expérimentale et la courbe analytique sera en général médiocre. Aussi cette méthode n'est-elle guère employée.

§ 5. LA MÉTHODE D'IMPÉDANCE DE G. NEUMANN ⁽⁶²⁾.

Le problème de l'oscillation longitudinale libre des masses d'eau conduisant à une équation différentielle en tous points comparable à celle des oscillations électriques d'un circuit inductif-capacitif (la résistance ohmique, qui joue le même rôle mathématique que le frottement interne de l'eau, étant négligée puisque ce dernier l'est aussi), il était assez naturel d'étendre au problème hydrodynamique le procédé de solution utilisé en électrotechnique: écrire que l'impédance du système est nulle. On obtient ainsi une équation (habituellement transcendante) dont l'inconnue est la pulsation $\omega = 2\pi/T$ du système.

En électricité on a, avec les notations classiques, pour un circuit inductif-capacitif oscillant, non amorti :

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0.$$

⁽⁶¹⁾ Cf. p. ex. RUNGE, C. und KÖNIG, H., *Vorlesungen über Numerisches Rechnen*, Berlin, 1924, pp. 311-316; COLLATZ, L., *Numer. Behandl. von Diffgl.*, Berlin, 1951, pp. 26 sqq.

⁽⁶²⁾ NEUMANN, G., *Die Impedanz Mechan. Schwingungssysteme und ihre Anwendung auf die Theorie der Seiches*, Ann. der Hydr., 72 (1944), pp. 65-79; *Eine Methode zur Berechnung der Eigenperioden zusammengesetzter Seebeckensysteme*, ibid., 72 (1944), pp. 193-205; *Ueber Seiches in Meeresbuchten und die Frage der Mündungskorrektur*, Annali di Geofisica, 3 (1950), pp. 25-31.

Si l'on prend des solutions oscillantes pour I , c'est-à-dire $I = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$, on a

$$\left(i\omega \mathcal{L} + \frac{1}{i\omega C}\right) I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = 0, \quad \text{d'où } \omega = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}, \quad \text{ou } T = 2\pi \sqrt{\mathcal{L}C},$$

c'est-à-dire la formule de THOMSON bien connue.

Mathématiquement, il a suffi, pour obtenir ce dernier résultat, d'écrire que l'impédance du système est nulle :

$$Z \equiv R + i\left(\omega \mathcal{L} - \frac{1}{\omega C}\right) = 0,$$

(R étant nul dans le cas qui nous occupe).

En mécanique, on a de même, pour l'oscillateur harmonique :

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + r \frac{d\xi}{dt} + s\xi = 0$$

(ξ étant l'élongation, r la constante de frottement, m la masse, s la constante de raideur). Si $r = 0$, on a en prenant des solutions oscillantes pour ξ ($\xi = \xi_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$):

$$\left(i\omega m + \frac{s}{i\omega}\right) \xi_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = 0 \quad \text{d'où } \omega = \sqrt{s/m} \quad \text{ou } T = 2\pi \sqrt{m/s};$$

on voit que la masse joue le même rôle que la self-induction \mathcal{L} et que la constante de raideur correspond à l'inverse de la capacité C . L'impédance mécanique est donc le rapport d'une force à une vitesse.

En hydrodynamique enfin, l'impédance sera le rapport de la pression hydrostatique maxima due à la dénivellation et s'exerçant sur la tranche liquide, à la vitesse de déplacement du volume balayé; ceci suppose nécessairement que les systèmes oscillants soient de profondeur et de largeur uniforme. Etant donné que le frottement interne est négligé, l'impédance hydrodynamique est, tout comme les impédances électrique et mécanique dans les mêmes conditions, une grandeur purement imaginaire.

On peut encore poursuivre la comparaison entre les systèmes électriques et les systèmes hydrodynamiques oscillants, en remarquant qu'à une ligne en court-circuit à son extrémité correspond un canal ouvert sur une masse d'eau infinie (nœud de dénivellation à l'embouchure); si la ligne est ouverte, le cas est analogue à celui d'un canal fermé à son extrémité (ventre de dénivellation à l'extrémité).

Voici, à titre d'illustration de la méthode, quelques applications simples.

a) Soit un canal, fermé aux deux extrémités, de longueur l , de profondeur h_0 et de largeur b_0 (uniformes). L'origine des x étant prise à l'une des extrémités, on a pour le fondamental :

$$\zeta = \zeta_0 e^{i\omega t} \cos \frac{\omega x}{2c},$$

$c = \Lambda/T$ désignant la vitesse de propagation et Λ , longueur d'onde de la seiche, étant égal à $2l$.

L'équation du mouvement donne

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\omega g}{2c} \zeta_0 e^{i\omega t} \sin \frac{\omega x}{2c}$$

d'où

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{g}{2ic} \zeta_0 e^{i\omega t} \sin \frac{\omega x}{2c} + c^{te}.$$

Moyennant un choix convenable de l'origine des temps, la constante d'intégration pourra être prise nulle : il faut que, pour $t = 0$, la vitesse horizontale atteigne un maximum, c'est-à-dire que pour $t = 0$ la masse d'eau passe en oscillant à travers sa position au repos.

On a alors

$$Z \equiv \frac{\rho g Z_M}{S \xi_M} = \frac{\rho g \zeta_0 \cos(\omega x/2c)}{(g/2ic) S \zeta_0 \sin(\omega x/2c)} = \frac{2i\rho c}{S} \cotg \frac{\omega x}{2c}. \quad (\text{II.6})$$

Cette quantité s'annule pour $x = l$ à condition que

$$\frac{\omega l}{2c} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{c'est-à-dire que} \quad T = \frac{2l}{\sqrt{gh_0}}.$$

La formule de MERIAN (pour le fondamental) se retrouve ainsi comme le pendant hydrodynamique de la formule de THOMSON.

Si le canal est fermé en $x = 0$ et ouvert en $x = l$, on a $\Lambda = 4l$ et l'équation de la période s'écrit

$$\cotg \frac{\omega l}{c} = 0, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{4l}{\sqrt{gh_0}}.$$

Si le canal est ouvert aux deux bouts, on retrouve à nouveau $\Lambda = 2l$, d'où l'équation

$$\tg \frac{\omega l}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad T = \frac{2l}{\sqrt{gh_0}}.$$

Ces résultats s'étendent sans difficulté aux modes supérieurs.

Mais l'intérêt véritable de la méthode réside dans la simplification qu'elle apporte à l'étude des bassins couplés; suivant que les masses d'eau sont « en série » ou « en parallèle », on additionne les impédances ou leurs inverses et on annule l'impédance totale, ce qui donne l'équation en ω , c'est-à-dire la période du système. Si les bassins sont de forme irrégulière, un calcul préalable est nécessaire, car la méthode implique essentiellement que la largeur et la profondeur de chaque bassin soient constantes, ces grandeurs pouvant cependant différer d'un bassin à l'autre. On devra donc calculer la période de chaque bassin comme s'il était fermé et donc entièrement autonome, et ensuite trouver les dimensions d'un bassin de largeur et de profondeur constante, de longueur égale à celle du bassin irrégulier en question et de période égale à celle de ce dernier.

Le système est ainsi remplacé par un système « équivalent » quant aux périodes (le profil des seiches pouvant être plus ou moins altéré par cette substitution).

b) Soit le cas d'un canal fermé en forme de Y (cf. fig. 8). L'eau venant de I pouvant s'écouler aussi bien en II qu'en III, on dira que (I, II) et (I, III) sont en série et que (II, III) sont en parallèle.

Soient Z_1 , Z_2 , Z_3 les impédances respectives des trois tronçons, et Z_{23} celle du système (II, III); on aura :

$$\frac{1}{Z_{23}} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \quad \text{ou} \quad Z_{23} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3};$$

l'impédance totale vaut

$$Z \equiv Z_1 + Z_{23} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2 + Z_3},$$

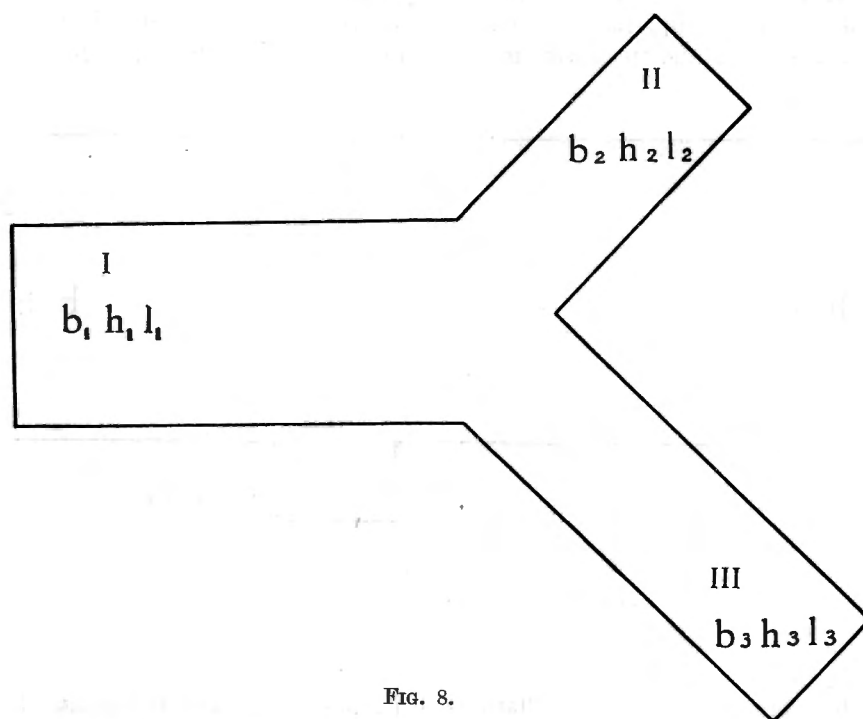


FIG. 8.

[D'après G. NEUMANN, Ann. Hydrographie, 72 (1944), pp. 65 sqq.]

et l'équation $Z = 0$ s'écrira, à cause de (II.6) :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{b_i h_i}{c_i} \operatorname{tg} \frac{\omega l_i}{c_i} = 0,$$

ou, en multipliant par g :

$$\sum_{i=1}^3 b_i c_i \operatorname{tg} \frac{\omega l_i}{c_i} = 0.$$

On vérifie également sans difficulté que si le canal I est ouvert sur un océan infini, II et III restant fermés, l'équation aux fréquences devient :

$$-b_1 c_1 \operatorname{cotg} \frac{\omega l_1}{c_1} + b_2 c_2 \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c_2} + b_3 c_3 \operatorname{tg} \frac{\omega l_3}{c_3} = 0.$$

Si I et II sont ouverts sur un océan infini et si III reste fermé, on trouve pour l'équation aux fréquences :

$$-b_1 c_1 \cotg \frac{\omega l_1}{c_1} - b_2 c_2 \cotg \frac{\omega l_2}{c_2} + b_3 c_3 \tg \frac{\omega l_3}{c_3} = 0.$$

Enfin, si les trois canaux sont ouverts, l'équation devient :

$$\sum_{i=1}^3 b_i c_i \cotg \frac{\omega l_i}{c_i} = 0.$$

c) La méthode de NEUMANN fournit également une réponse mathématique élégante à la question suivante : est-il légitime, lorsqu'on étudie les seiches longitudinales d'un lac, de « couper » les petites baies latérales, de dimensions très petites devant celles de l'ensemble du lac ? Physiquement, la chose va de soi : il est clair que la présence d'une baie qui ne contient qu'une très faible masse d'eau ne saurait influencer que d'une manière

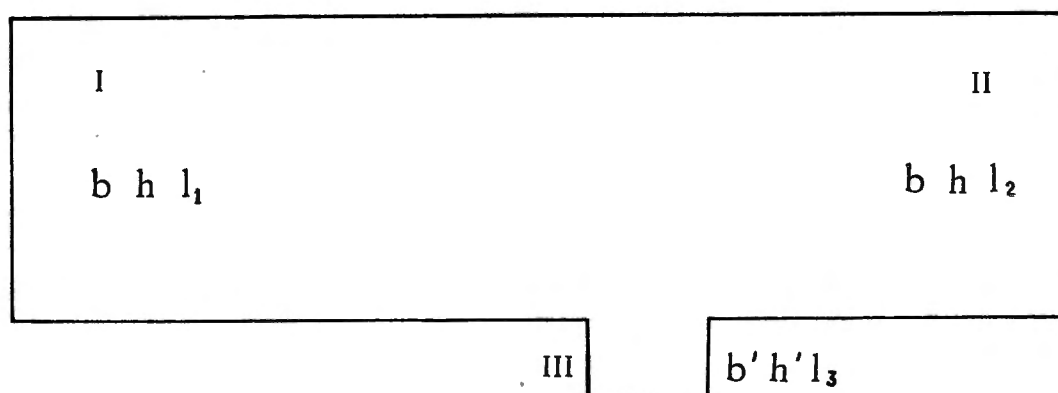


FIG. 9.

[D'après G. NEUMANN, même article.]

négligeable les périodes et les dénivellations des seiches affectant la totalité de la masse d'eau du lac.

Mathématiquement, la chose vaut cependant la peine d'être mise au point; il ne suffit pas, par exemple, de montrer « expérimentalement », en faisant des calculs numériques à l'aide d'une méthode approchée, comme celle de DEFANT, que les périodes du lac possédant une ou plusieurs petites baies latérales ne diffèrent pratiquement pas de celles que l'on obtient en amputant le lac de ces baies : en effet la présence de ces baies interdit, en toute rigueur, l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides; il y aurait contradiction à utiliser ici une méthode reposant sur cette hypothèse.

Soit donc le cas d'un lac possédant une petite baie latérale (fig. 9); soient Z_1 , Z_2 , Z_3 les impédances respectives de trois « bassins »; I et II sont supposés avoir même largeur b et même profondeur h .

Les bassins I et III peuvent être considérés comme étant en parallèle; quant au système (I, III), il est en série avec II. On a donc

$$Z_{13} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3},$$

et l'impédance totale est, comme précédemment :

$$Z = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1 + Z_3} = 0.$$

L'équation $Z = 0$ peut donc s'écrire :

$$\frac{bh}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega l_1}{c} + \frac{bh}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c} + \frac{b'h'}{c'} \operatorname{tg} \frac{\omega l_3}{c'} = 0. \quad (\text{A})$$

A cause des dimensions très petites de III, les quotients $\frac{b'h'}{c'}$ et $\frac{\omega l_3}{c'}$ sont négligeables et, par suite, le troisième terme peut être laissé de côté.

Si l'on avait purement et simplement coupé le bassin III, on aurait obtenu, pour I et II en série, l'équation

$$\frac{c}{bh} \operatorname{cotg} \frac{\omega l_1}{c} + \frac{c}{bh} \operatorname{cotg} \frac{\omega l_2}{c} = 0;$$

or, cette dernière, après division par

$$\operatorname{cotg} \frac{\omega l_1}{c} \operatorname{cotg} \frac{\omega l_2}{c}$$

est identique à l'équation (A) dans laquelle on aurait négligé le troisième terme. La question est ainsi résolue.

d) G. NEUMANN examine encore un grand nombre de bassins couplés de différentes manières, ouverts sur un océan infini ou fermés; il semble inutile pour le moment de passer en revue tous ces résultats, puisque le principe de la méthode reste toujours le même : annuler l'impédance totale du système des bassins ⁽⁶³⁾. Relevons seulement que lorsque des détroits relient les bassins entre eux ou à l'océan, une légère complication surgit : étant donné les faibles dimensions du détroit devant celles des bassins, celui-ci ne peut plus être purement et simplement assimilé à un canal où règne une oscillation stationnaire propre, il y aura lieu de procéder à une « correction d'embouchure ». La théorie de cette dernière a fait l'objet de divers travaux dont les résultats seront résumés dans un prochain paragraphe (cf. § 9).

e) Plus généralement, lorsque le lac dont on étudie les oscillations libres est très étendu ou se compose de plusieurs bassins (ce sera le cas notamment pour le Tanganika), un problème spécial se pose, que l'on pourra résoudre grâce à l'introduction de la notion d'impédance en hydrodynamique : qu'arrive-t-il lorsqu'une perturbation de la pression atmosphérique (cyclone, orage, etc.) déclenche une onde de pression dans l'un seulement des bassins du lac, sans affecter directement les autres ?

Si le bassin affecté était fermé, cette onde y amorcerait un système de seiches composé généralement de la superposition de plusieurs modes normaux.

⁽⁶³⁾ Cf. NEUMANN, G., articles cités note 62, principalement le premier, pp. 70-79. Les résultats sont confirmés par des études expérimentales, cf. Ann. Hydrogr., 71 (1943), p. 418; 72 (1944), pp. 195 sqq.

Mais, comme le bassin en question communique avec un autre bassin au moins, il est possible que le mouvement s'étende à ce dernier, ou bien, au contraire, qu'il reste pratiquement localisé au bassin où s'est produite la perturbation initiale. Tout dépendra de la manière dont se comportent, au point de vue de l'impédance hydrodynamique, les détroits, canaux ou étranglements reliant les différents bassins entre eux; leur rôle peut être assimilé à celui de filtres électriques, les bassins eux-mêmes faisant alors fonction de circuits oscillants. Il suffira donc de déterminer les impédances des différents « circuits » et « filtres » pour pouvoir déterminer les coefficients de réflexion et de transmission des détroits et étranglements à l'égard des ondes de pression se propageant à partir de l'un des bassins, et résoudre ainsi le problème. Si l'onde est transmise de manière pratiquement totale à travers les détroits, le mouvement se traduira par des seiches globales, affectant tout le lac; si au contraire la réflexion est à peu près complète, l'on aura des seiches nettement localisées; dans les cas intermédiaires enfin, les deux types de seiches coexisteront, avec échange continu d'énergie cinétique d'un type à l'autre.

Pratiquement, on procédera comme suit : après avoir calculé, par la méthode de DEFANT, la période propre (à un ou plusieurs nœuds) du lac considéré comme formant un tout (pour autant que la forme de celui-ci permet d'introduire l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides), on dressera une table de la fonction $\Xi(v) = \zeta/u$ dans les régions où l'on a repéré l'existence d'un étranglement ou d'un détroit ⁽⁶⁴⁾ et l'on comparera celle-ci avec la fonction

$$-\frac{2\pi c'}{gST'} \cotg \frac{\pi x}{2l'}$$

en deçà du détroit, et avec la fonction

$$\frac{2\pi c''}{gST''} \cotg \frac{\pi x}{2l''}$$

au-delà du détroit, l' et l'' désignant les longueurs respectives des deux bassins situés l'un en deçà et l'autre au-delà du détroit, longueurs mesurées le long du Talweg et en direction du détroit en question (d'où les signes opposés des deux fonctions \cotg); c' , T' , etc., ont des significations correspondantes.

En effet, on a, pour l'impédance d'un bassin de longueur l , ouvert en $x=l$:

$$Z \equiv \frac{\rho g \zeta_M}{S \dot{\xi}_M} = \frac{i \rho c}{S} \cotg \frac{\omega x}{c}.$$

⁽⁶⁴⁾ En général, l'inspection d'une simple carte géographique du lac sera insuffisante pour repérer ces régions, et c'est à la courbe normale du lac (cf. p. 24) qu'il faudra avoir recours; seul un minimum bien accusé compris entre deux maxima bien marqués également pourra être interprété comme correspondant à un étranglement ou détroit. On verra plus loin, à propos du Tanganika, que la division du lac en bassins, qui résulte de cette manière de voir, peut différer considérablement de celle que l'on serait tenté d'adopter après examen d'une carte géographique.

Comme $u \sim e^{i\omega t}$ et $c = \Lambda/T = 4l/T$, on en tire : $\zeta/u = -\frac{2\pi c}{SgT} \cotg \frac{\pi x}{2l}$.

(Les formules données ici se rapportent aux seiches uninodales, mais il est facile de les étendre au cas des plurinodales.)

Si le graphique de la fonction $\Xi(v)$ présente, dans la région étudiée et de part et d'autre ce que l'on supposait être un étranglement, une allure bien semblable à celle de la fonction \cotg , sans discontinuités brusques, on sera assuré que les régions que l'on avait supposées séparées par un détroit se comportent en réalité comme un seul bassin, du moins à l'égard du type de seiche correspondant à la période utilisée dans le calcul : les impédances Z' et Z'' des deux régions sont les mêmes.

Si au contraire une discontinuité de la fonction $\Xi = \zeta/u$ apparaît dans la zone explorée, on devra en conclure que les impédances Z' et Z'' sont distinctes de part et d'autre de cette discontinuité, et qu'il y a donc une véritable séparation entre les bassins. Soit alors α le rapport des impédances : $Z'/Z'' = \alpha$; cette quantité se détermine aisément à l'aide de la table ζ/u . Il suffit à présent d'utiliser les résultats bien connus en électricité (théorie des phénomènes de régime sur les lignes) :

$$\text{coefficient de réflexion : } \rho_R = \frac{Z'' - Z'}{Z'' + Z'} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha},$$

$$\text{coefficient de transmission : } \rho_T = \frac{2Z'}{Z'' + Z'} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha},$$

pour trouver immédiatement le pourcentage de dénivellation réfléchi ou transmise à travers l'étranglement ou le détroit.

Le procédé s'adapte sans difficulté aux différents cas particuliers que l'on peut rencontrer, et permet de rendre compte d'un phénomène important, dont aucune des autres méthodes décrites ici ne permettait l'investigation.

§ 6. LA MÉTHODE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DE FREDHOLM.

On peut transformer l'équation

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0, \quad (\text{I.10})$$

soumise aux conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$, en une équation intégrale de FREDHOLM, de la manière suivante ⁽⁶⁵⁾ : on a

$$u(v) = - \int_0^v (v-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + c_1 v + c_2$$

⁽⁶⁵⁾ Cf. HAMEL, G., *Integralgleichungen*, Berlin, 1949, pp. 17 sqq.

[en effet, en dérivant deux fois, on obtient successivement :

$$u' = \left[-(v-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} \right]_{z=0}^{z=v} - \int_0^v \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + c_1 = - \int_0^v \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + c_1; \quad u'' = - \frac{\lambda u(v)}{\sigma(v)},$$

c'est-à-dire (I.10)], où c_1 et c_2 sont des constantes à déterminer de manière que $u(v)$ satisfasse aux conditions-frontière. On a évidemment $c_2 = 0$ à cause de $u(0) = 0$. La seconde condition, $u(a) = 0$, donne :

$$0 = - \int_0^a (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + c_1 a, \quad \text{d'où} \quad c_1 = \frac{1}{a} \int_0^a (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} u(v) &= \frac{v}{a} \int_0^a (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz - \int_0^v (v-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz = - \int_0^v (v-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz \\ &+ \int_0^v \frac{v}{a} (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + \int_v^a \frac{v}{a} (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz = \int_0^v \frac{-(v-z)a + v(a-z)}{a} \cdot \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz \\ &+ \int_v^a \frac{v}{a} (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz = \int_0^v \frac{z(a-v)}{a} \cdot \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + \int_v^a \frac{v(a-z)}{a} \cdot \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz. \end{aligned}$$

Posons

$$K(v, z) = \begin{cases} \frac{z(v-a)}{a} & \text{pour } z \leq v, \\ \frac{v(z-a)}{a} & \text{pour } z \geq v. \end{cases}$$

Il vient alors

$$u(v) + \lambda \int_0^a K(v, z) \frac{u(z)}{\sigma(z)} dz = 0. \quad (\text{II.7})$$

La fonction $K(v, z)$ est le noyau (symétrique) de l'équation intégrale de FREDHOLM (II.7).

A l'aide de cette équation, on peut obtenir λ par le procédé d'itération de E. PICARD⁽⁶⁶⁾. Pour cela, on prend une fonction d'essai $u(v) = u_{(1)}(v)$, que l'on porte dans (II.7).

La seule condition à laquelle $u_{(1)}(v)$ doit satisfaire est que l'on ait :

$$\int_0^a K(v, z) \frac{u_{(1)}(z)}{\sigma(z)} dz \neq 0;$$

on donne ensuite à v une valeur fixe v_0 ($0 \leq v_0 \leq a$) telle que $u(v_0) \neq 0$; la signification physique de u rend ce choix aisé : il suffit de prendre pour v_0 l'abscisse d'un point dont on soit sûr qu'il ne coïncide pas avec un ventre de l'oscillation étudiée.

⁽⁶⁶⁾ Cf. PICARD, E., *Traité d'Analyse*, III, chap. 7; HAMEL, G., *op. cit.*, pp. 51 sqq.

Une seconde fonction d'essai $u_{(2)}(v)$ se détermine alors à l'aide de l'équation (II.7) :

$$u_{(2)}(v) + \lambda' \int_0^a K(v, z) \frac{u_{(1)}(z)}{\sigma(z)} dz = 0.$$

Il suffit d'assigner une valeur donnée à $u_{(2)}(v_0)$ pour en déduire une première approximation de λ , soit λ' :

$$u_{(2)}(v_0) + \lambda' \int_0^a K(v_0, z) \frac{u_{(1)}(z)}{\sigma(z)} dz = 0.$$

Procédant ainsi par itération, on obtient successivement une troisième fonction $u_{(3)}(v)$ et une seconde approximation λ'' pour le paramètre λ , puis une quatrième fonction $u_{(4)}(v)$ et une troisième approximation λ''' , etc.

On démontre que si les fonctions $u_{(1)}, u_{(2)}, \dots$ sont normées, les valeurs $\lambda', \lambda'', \dots$ convergent en décroissant vers la valeur propre cherchée.

Le même raisonnement peut s'appliquer à l'équation (I.11) : on trouve l'équation intégrale :

$$\zeta(s) + \lambda \int_0^c K(s, z) \sigma(z) \zeta(z) dz = 0, \quad (\text{II.7}')$$

que l'on résout par le même procédé que l'équation (II.7).

Le choix du point s_0 ($0 \leq s_0 \leq c$) sera maintenant dicté par le souci d'éviter de prendre un point où ζ s'annule, c'est-à-dire un nœud de l'oscillation étudiée, ce qui en général pourra se faire sans difficulté.

Comme dans le cas de lacs réels $\sigma(v)$ n'est connue que par points, les calculs d'itération seront en général démesurément longs, et le procédé risque d'avoir peu d'intérêt pratique. Nous verrons cependant, à propos du Tanganika, que l'on obtient un λ (fondamental) presque parfait dès le premier essai : la méthode est ainsi de loin la plus rapide pour le calcul de ce fondamental.

§ 7. LA MÉTHODE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DE VOLTERRA.

L. MATTEUZZI transforme comme suit l'équation de CHRYSTAL (I.10).

Une première intégration de 0 à v donne ⁽⁶⁷⁾ :

$$\frac{du}{dv} = u'(0) - \int_0^v \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz,$$

et une seconde intégration entre les mêmes limites [en remarquant que $u(0) = 0$] :

$$u(v) = - \int_0^v dz \int_0^z \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + u'(0) v,$$

ou

$$u(v) = - \int_0^v \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz \int_z^v dz + u'(0) v = \int_0^v (z-v) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + u'(0) v.$$

⁽⁶⁷⁾ MATTEUZZI, L., *Sulla Determinazione delle Seiches forzate e delle Seiches libere mediante una equazione integrale di Volterra*, Rendic. Atti R. Acc. Naz. Lincei, 33 (1924), 5^e série, Cl. sc. fis. mat. e nat., pp. 474-480.

On en tire

$$u'(0) v = u(v) - \lambda \int_0^v (z - v) \frac{u(z)}{\sigma(z)} dz, \quad (\text{II.8})$$

c'est-à-dire une équation de VOLTERRA de seconde espèce, dont le noyau est :

$$\frac{\lambda(v - z)}{\sigma(z)}.$$

Elle admet pour solutions ⁽⁶⁸⁾ :

$$u(v) = u'(0) v + \int_0^v K(v, z) u'(0) z dz,$$

le noyau résolvant $K(v, z)$ étant égal à

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda(v - z)}{\sigma(z)} \right]^{(i)},$$

où l'on a

$$\left[\frac{\lambda(v - z)}{\sigma(z)} \right]^{(1)} = - \frac{\lambda(v - z)}{\sigma(z)}$$

$$\left[\frac{\lambda(v - z)}{\sigma(z)} \right]^{(2)} = \frac{(-\lambda)^2}{\sigma(z)} \int_z^v \frac{(v - z_1)(z_1 - z)}{\sigma(z_1)} dz_1$$

$$\left[\frac{\lambda(v - z)}{\sigma(z)} \right]^{(3)} = \frac{(-\lambda)^3}{\sigma(z)} \int_z^v \int_z^{z_1} \frac{(v - z_1)(z_1 - z_2)(z_2 - z)}{\sigma(z_1)\sigma(z_2)} dz_1 dz_2$$

$$\left[\frac{\lambda(v - z)}{\sigma(z)} \right]^{(i)} = \frac{(-\lambda)^i}{\sigma(z)} \int_z^v \int_z^{z_1} \dots \int_z^{z_{i-2}} \frac{(v - z_1)(z_1 - z_2) \dots (z_{i-1} - z)}{\sigma(z_1) \dots \sigma(z_{i-1})} dz_1 \dots dz_{i-1}.$$

La solution $u(v)$ peut se mettre sous la forme :

$$u(v) = u'(0) v + \sum_{i=1}^{\infty} (-\lambda)^i U_i(0, v).$$

On démontre qu'entre les $U_i(0, v)$ il existe la relation de récurrence

$$U_i(0, v) = \int_0^v \frac{v - z}{\sigma(z)} U_{i-1}(0, z) dz,$$

et qu'ainsi on a $u'(0) v = U_0(0, v)$.

⁽⁶⁸⁾ VOLTERRA, V., *Leçons sur les équations intégrales et intégral-différentielles*, Paris, 1913, chap. II, § 2.

Faisons ensuite $v = a$ dans la solution ci-dessus, et remarquons que $u(a) = 0$: il vient

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i U_i(0, a) = 0. \quad (\text{II.9})$$

Cette dernière égalité n'est autre que l'équation aux valeurs propres du problème.

Ainsi présentée, la méthode reste purement théorique et n'a jamais été utilisée pour la résolution numérique d'un problème de seiches. Cependant, quoi qu'en pense L. MATTEUZZI lui-même, le point de vue qui sert de base à cette méthode n'est pas essentiellement différent de celui de J. PROUDMAN, qui arrive, par une voie un peu détournée, à la même équation aux valeurs propres et à la même solution $u(v)$ de l'équation de CHRYSTAL. Ce procédé de J. PROUDMAN, antérieur d'une dizaine d'années à l'exposé de MATTEUZZI, se prête à des applications numériques ⁽⁶⁹⁾, mais les calculs sont excessivement longs et la précision n'est pas supérieure à celle de la méthode de DEFANT. Aussi ne sera-t-il pas utilisé dans ce travail et se contentera-t-on d'en donner une description sommaire.

§ 8. LA MÉTHODE DE J. PROUDMAN ⁽⁷⁰⁾.

Au lieu de l'équation différentielle de CHRYSTAL (I.10), l'auteur considère une équation aux différences finies :

$$u(r-1) + \left[\frac{\alpha^2}{m^2} \cdot \frac{\lambda}{\sigma(r)} - 2 \right] u(r) + u(r+1) = 0,$$

pour $r = 1, 2, \dots, m-1$, avec $u(0) = u(m) = 0$. Cette équation est suggérée par l'équation de CHRYSTAL qui en est la forme-limite quand les différences deviennent infiniment petites.

Ces relations forment un système d'équations linéaires en $u(1), \dots, u(m-1)$ à solutions non toutes nulles, pourvu que le déterminant

$$D(\mu, \nu, \lambda) \equiv \begin{vmatrix} 2 - \frac{\alpha^2}{m^2} \cdot \frac{\lambda}{\sigma(\mu+1)} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 - \frac{\alpha^2}{m^2} \cdot \frac{\lambda}{\sigma(\mu+2)} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 - \frac{\alpha^2}{m^2} \cdot \frac{\lambda}{\sigma(\nu-1)} \end{vmatrix}$$

s'annule lorsque $\mu = 0$ et $\nu = m$, c'est-à-dire que l'on ait $D(0, m, \lambda) = 0$.

⁽⁶⁹⁾ La seule que l'on en connaisse dans la littérature scientifique concerne les seiches du lac de Genève : DOODSON, A. T., CAREY, R. M. and BALDWIN, R., *Theoretical Determ. of the Longit. Seiches of Lake Geneva*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 52 (1920), pp. 629-642.

⁽⁷⁰⁾ Cf. PROUDMAN, J., *Free and Forced Longit. Tidal Motion in a Lake*, Proc. London Math. Soc., 14 (1914), pp. 240-250, ainsi que DOODSON, A. T., etc., *op. cit.*

Les racines du système correspondant à $\lambda = \lambda_j$ satisfont aux relations de CRAMER :

$$\frac{u(1)}{D(0, 1, \lambda_j)} = \frac{u(2)}{D(0, 2, \lambda_j)} = \dots = \frac{u(m-1)}{D(0, m-1, \lambda_j)},$$

ou

$$\frac{u(1)}{D(1, m, \lambda_j)} = \frac{u(2)}{D(2, m, \lambda_j)} = \dots = \frac{u(m-1)}{D(m-1, m, \lambda_j)}.$$

On démontre par ailleurs que $D(\mu, \nu, 0) = \nu - \mu$ et que

$$D(\mu, \nu, \lambda) = \nu - \mu + \sum_{n=1}^{\nu-\mu-1} (-\lambda)^n S_n(\mu, \nu)$$

avec

$$\begin{aligned} S_n(\mu, \nu) &= \frac{\alpha^{2n}}{m^{2n}} \sum_{s_n=\mu+n}^{\nu-1} \sum_{s_{n-1}=\mu+n-1}^{s_n-1} \dots \sum_{s_2=\mu+2}^{s_2-1} \sum_{s_1=\mu+1}^{s_2-1} \frac{(\nu-s_n)(s_n-s_{n-1}) \dots (s_1-\mu)}{\sigma(s_1) \sigma(s_2) \dots \sigma(s_n)} \\ &= \frac{\alpha^{2n}}{m^{2n}} \sum_{s_n=\mu+1}^{\nu-n} \sum_{s_{n-1}=\mu+1}^{s_n-1} \dots \sum_{s_2=s_2+1}^{\nu-2} \sum_{s_1=s_1+1}^{s_2-1} \frac{(\nu-s_1)(s_1-s_2) \dots (s_n-\mu)}{\sigma(s_1) \sigma(s_2) \dots \sigma(s_n)}. \end{aligned}$$

Ces expressions mènent à considérer les intégrales :

$$\int_{s_n=\xi}^{\eta} \int_{s_{n-1}=\xi}^{s_n} \dots \int_{s_2=\xi}^{s_2} \int_{s_1=\xi}^{s_2} \frac{(\eta-s_n)(s_n-s_{n-1}) \dots (s_2-s_1)(s_1-\xi)}{\sigma(s_1) \dots \sigma(s_n)} ds_1 \dots ds_n$$

et

$$\int_{s_n=\xi}^{\eta} \int_{s_{n-1}=s_n}^{\eta} \dots \int_{s_2=s_2}^{\eta} \int_{s_1=s_2}^{\eta} \frac{(\eta-s_1)(s_1-s_2) \dots (s_{n-1}-s_n)(s_n-\xi)}{\sigma(s_1) \dots \sigma(s_n)} ds_1 \dots ds_n$$

n étant un entier positif et $0 \leq \xi \leq \eta \leq a$.

Les intégrandes sont toujours positifs et l'on peut intervertir l'ordre des intégrations pourvu que les intégrales multiples existent. On démontre que les deux intégrales ci-dessus sont égales. Soit $I_n(\xi, \eta)$ leur valeur commune. On a alors la relation de récurrence :

$$I_n(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \frac{\eta-s}{\sigma(s)} I_{n-1}(\xi, s) ds.$$

Considérons ensuite la fonction $R(\xi, \eta, \lambda)$, définie par

$$R(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i I_i(\xi, \eta).$$

On démontre que si $\sigma(v) > kv(a-v)$ ($k =$ constante positive), $I_n(0, a)$ existe, et que les solutions u_j de l'équation de CRYSTAL sont données par

$$u_j = R(0, v, \lambda_j) = R(v, a, \lambda_j), \quad (\text{II.10})$$

l'équation aux valeurs propres étant

$$R(0, a, \lambda_j) = 0. \quad (\text{II.11})$$

Pour l'utilisation pratique du procédé, on procède par différences finies, à l'aide d'un grand nombre de divisions. Les calculs sont très longs, ce qui rend la méthode peu commode. Aussi renvoyons-nous pour complément d'information aux articles originaux (voir note 70).

§ 9. LA MÉTHODE DE CORRECTION DE K. HONDA ⁽⁷¹⁾.

Cette méthode, qui s'applique uniquement aux baies et aux golfes, consiste à les assimiler en première approximation à des bassins rectangulaires de profondeur h_0 et de largeur b_0 (constantes), ouverts à une extrémité, et à apporter aux périodes d'oscillation ainsi obtenues deux corrections : la première, pour l'embouchure du golfe, où les conditions pour ξ et ζ ne sont pas exactement les mêmes qu'au milieu d'un bassin fermé de même section droite et de longueur double; la seconde vise à tenir compte des variations de largeur et de profondeur que présente le golfe depuis son embouchure jusqu'à son extrémité fermée.

Pour que ce procédé de corrections ait un sens, il faut évidemment que le golfe étudié présente une forme à peu près rectangulaire et une profondeur sensiblement uniforme, sans quoi les périodes obtenues en première approximation (à l'aide de la formule $T_k = 4l/k\sqrt{gh_0}$ seraient trop grossièrement inexactes. On aura donc intérêt à traiter les golfes et baies de forme très irrégulière de préférence à l'aide de la méthode de GOLDBERG (même chapitre, pp. 59-60), qui présente en outre l'avantage de donner point par point tout le profil de la seiche, déterminant ainsi l'emplacement des ventres et des nœuds avec bien plus de précision que ne le permettrait la méthode japonaise : en effet, cette dernière ne corrige que la période et non pas la fonction propre (assimilée en première approximation à une sinusoïde).

a) Correction d'embouchure. — Le golfe étant supposé de largeur b_0 et de profondeur h_0 uniformes, on a pour l'oscillation fondamentale :

$$\zeta = \zeta_0 \sin \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{2\pi}{T_1} t,$$

d'où, à cause de l'équation de continuité ($\zeta = -h_0 \partial \xi / \partial x$) :

$$\xi = \zeta_0 \frac{2l}{\pi h_0} \cos \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{2\pi}{T_1} t.$$

On a alors, pour l'énergie cinétique à l'intérieur du golfe :

$$\mathcal{E}_{\text{INT}} \equiv \frac{1}{2} \rho h_0 b_0 \int_0^l \dot{\xi}^2 dx = \frac{4 \zeta_0^2 b_0 l^3 \rho}{h_0 T_1^2} \sin^2 \frac{2\pi}{T_1} t,$$

et pour l'énergie potentielle :

$$\mathcal{D}_{\text{INT}} \equiv \frac{1}{2} \rho g b_0 \int_0^l \zeta^2 dx = \frac{\zeta_0^2 l b_0 g \rho}{4} \cos^2 \frac{2\pi}{T_1} t.$$

⁽⁷¹⁾ Cf. HONDA, K., TERADA, T., YOSHIDA, Y. and ISITANI, D., *An Investigation on the Secondary Undulations of Oceanic Tides*, Journal of the College of Sc. (Imp. Univ. Tokyo), 24 (1908). Cet exposé original contient de nombreuses fautes d'impressions et manque de clarté au point d'être à peu près inutilisable. On trouvera un bon exposé de la méthode par DEFANT, A., Ann. Hydr., 39 (1911), pp. 120-126, et aussi par CALOI, P., Ann. Geofis., 2 (1949), pp. 222-228.

L'énergie cinétique due au mouvement de l'eau en dehors du golfe ne peut se calculer que de manière approchée. On peut la prendre proportionnelle à l'énergie cinétique à l'embouchure et écrire (B étant un facteur de proportionnalité) :

$$\mathcal{E}_{\text{EXT}} = \frac{1}{2} \rho B \xi_{(\alpha=0)}^2 = \frac{1}{2} \rho B \frac{16 \zeta_0^2 l^2}{h_0^2 T_1^2} \sin^2 \frac{2\pi}{T_1} t.$$

Quant à l'énergie potentielle en dehors du golfe, elle est tellement faible qu'on peut la négliger devant \mathcal{W}_{INT} .

On doit donc avoir, à tout moment du temps,

$$\mathcal{E}_{\text{INT}} + \mathcal{E}_{\text{EXT}} + \mathcal{W}_{\text{INT}} = c^{\text{te}}.$$

Faisons successivement $t = 0$ et $t = T_1/4$: on aura

$$\frac{\zeta_0^2 l b_0 \rho g}{4} = \frac{4 \zeta_0^2 b_0 l^3 \rho}{h_0 T_1^2} + \frac{8 B \zeta_0^2 l^2 \rho}{h_0^2 T_1^2}$$

d'où

$$T_1^2 = \frac{16 l^2}{g h_0} \left(1 + \frac{2 B}{h_0 b_0 l} \right) \quad \text{ou} \quad T_1 = \frac{4 l}{\sqrt{g h_0}} \left(1 + \frac{2 B}{h_0 b_0 l} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{II.12})$$

Il est intéressant de comparer cette correction d'embouchure avec celle proposée par Lord RAYLEIGH pour le tuyau d'orgue ouvert à un bout ⁽⁷²⁾. Soit un tuyau d'orgue de section carrée (de côté a) et de longueur l (très grande devant a). Soit Λ la longueur d'onde du son qu'émettrait le tuyau s'il n'y avait pas à faire intervenir de correction d'embouchure. RAYLEIGH trouve que les vibrations ont lieu comme si l'on avait ajouté à la masse d'air (de densité uniforme, égale à ρ) en mouvement une masse égale à

$$\frac{\rho l a^2}{\pi} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \text{Log} \frac{\pi a}{\Lambda} \right), \quad (\text{II.13})$$

(où γ désigne la constante d'EULER, égale à 0,5772...).

Rapprochons ce résultat de celui de K. HONDA (II.12), en prenant $\Lambda = 4 l$ et en égalant ρB (qui joue précisément le rôle de la masse additionnelle) à l'expression (II.13).

Il vient ainsi, en posant $P = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \text{Log} \frac{\pi b_0}{4 l} \right)$:

$$T_1 = \frac{4 l}{\sqrt{g h_0}} \left(1 + \frac{4 P b_0}{l} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si T_1 désigne la période (fondamentale) corrigée et T'_1 cette période non corrigée, on a

$$\frac{T_1}{T'_1} = \left(1 + \frac{4 P b_0}{l} \right)^{\frac{1}{2}}$$

comme facteur de correction.

⁽⁷²⁾ Lord RAYLEIGH, *On the Open Organ-Pipe Problem in Two Dimensions*, Phil. Magaz., Ser. 6, vol. 8 (1904), pp. 481 sqq. (= *Scient. Pap.*, V, § 301, p. 206).

Voici la valeur de ce facteur pour quelques valeurs du rapport b_0/l :

$b_0/l =$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/10	1/20
$T_1/T_1' =$	1,320	1,261	1,217	1,187	1,163	1,106	1,064.

On voit que la correction d'embouchure n'est pas toujours négligeable.

b) Correction pour l'irrégularité de la section droite. — Le cas (théoriquement banal et exceptionnel dans la pratique) où les énergies potentielle et cinétique du système sont représentables sous forme quadratique,

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{2} \mu q^2 \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

étant mis à part ⁽⁷³⁾, on peut écrire en général

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho S(x) \xi^2 dx \quad \mathfrak{V} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho g b(x) \zeta^2 dx,$$

ou, avec les notations habituelles $\left(u = S \xi, \quad \zeta = -\frac{du}{dv}, \quad v = \int_0^x b(x) dx \right)$,

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \dot{u}^2 dx \quad \mathfrak{V} = \frac{1}{2} \rho g \int_0^l \frac{1}{b(x)} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx.$$

Posons maintenant

$$u = \sum_k A_k \sin \frac{k \pi x}{l} \cos \omega_k t,$$

expression de même forme que celle que l'on obtiendrait si $S(x)$ était constant.

Prenons $q_k = A_k \cos \omega_k t$ comme nouvelle coordonnée; on peut alors écrire

$$u = \sum_k \sin \frac{k \pi x}{l} \cdot q_k; \quad \dot{u} = \sum_k \sin \frac{k \pi x}{l} \cdot \dot{q}_k; \quad \frac{du}{dx} = \sum_k \frac{k \pi}{l} \cos \frac{k \pi x}{l} \cdot q_k,$$

et l'énergie cinétique prend la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \left[\sum_k \sin \frac{k \pi x}{l} \cdot \dot{q}_k \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \sum_k \sin^2 \frac{k \pi x}{l} \cdot \dot{q}_k^2 dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \sum_k \sum_{k'} \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k' \pi x}{l} \cdot \dot{q}_k \dot{q}_{k'} dx \\ &= \sum_k \left[\frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx \right] \dot{q}_k^2 + \sum_k \sum_{k'} \left[\frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k' \pi x}{l} dx \right] \dot{q}_k \dot{q}_{k'} \end{aligned}$$

(où l'on a $k' \neq k$).

⁽⁷³⁾ Dans ce cas, on aurait immédiatement, pour les équations de LAGRANGE : $m\ddot{q} + \mu q = 0$, d'où $q \sim \exp i(\omega t + \alpha)$, où $\omega = \sqrt{\mu/m}$.

De même l'énergie potentielle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} &= \frac{1}{2} \rho g \int_0^l \frac{1}{b(x)} \left[\sum_k \frac{k \pi}{l} \cos \frac{k \pi x}{l} \cdot q_k \right]^2 dx \\ &= \sum_k \left[\frac{1}{2} \rho g \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l \frac{1}{b(x)} \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx \right] q_k^2 + \sum_k \sum_{k'} \left[\frac{1}{2} \rho g \frac{k k' \pi^2}{l^2} \int_0^l \frac{1}{b(x)} \cos \frac{k \pi x}{l} \cos \frac{k' \pi x}{l} dx \right] q_k q_{k'}. \end{aligned}$$

Si $S(x)$ et $b(x)$ étaient constants, les facteurs $1/S(x)$ et $1/b(x)$ pourraient sortir des signes d'intégration, et les doubles sommes (aux seconds membres de \mathfrak{T} et \mathfrak{V}) s'annuleraient, à cause de l'orthogonalité des sinus et des cosinus. Les coordonnées q_k seraient alors de vraies coordonnées normales, et l'on aurait

$$\mathfrak{T} = \sum_k D_k \dot{q}_k^2 \quad \mathfrak{V} = \sum_k C_k q_k^2.$$

Comme $S(x)$ et $b(x)$ ne sont qu'approximativement constants, mais que l'écart entre le système à étudier et le système « normal » est supposé petit, on posera, comme le fait Lord RALEIGH (74),

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \sum_k \left[D_k + \Delta D_k \right] \dot{q}_k^2 + \sum_k \sum_{k'} \Delta D_{kk'} \dot{q}_k \dot{q}_{k'}, \\ \mathfrak{V} &= \sum_k \left[C_k + \Delta C_k \right] q_k^2 + \sum_k \sum_{k'} \Delta C_{kk'} q_k q_{k'}, \end{aligned}$$

où les $\Delta D_{kk'}$ et $\Delta C_{kk'}$ seront d'autant plus petits que le système se rapproche davantage d'un système « normal ». Dans le cas présent, où $S(x)$ et $b(x)$ s'écartent peu de leurs valeurs moyennes, les doubles sommes pourront être négligées.

D'autre part, en vertu du principe de minimum de RAYLEIGH-RITZ (75) on a

$$\omega_k^2 \simeq \frac{C_k + \Delta C_k}{D_k + \Delta D_k},$$

comme

$$C_k + \Delta C_k = \frac{1}{2} \rho g \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l \frac{1}{b(x)} \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx,$$

$$D_k + \Delta D_k = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx,$$

on aura

$$T_k^2 \simeq \frac{4 l^2}{k^2 g} \cdot \frac{\int_0^l \frac{1}{S(x)} \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx}{\int_0^l \frac{1}{b(x)} \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx}.$$

(74) Cf. Lord RALEIGH, *Theory of Sound*, I, § 90.

(75) ID., *ibid.*, COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme u. Num. Behandl.*, pp. 244 sqq.

Cette dernière formule n'est cependant pas d'un usage pratique, car $S(x)$ et $b(x)$ sont en général inconnues sous forme analytique. On peut néanmoins, puisque ces deux grandeurs s'écartent peu de leurs valeurs moyennes, les représenter par :

$$S(x) = S_0 + \Delta S(x) \quad b(x) = b_0 + \Delta b(x).$$

Par suite on prendra :

$$T_k^2 = \frac{4l^2 b_0}{k^2 g S_0} \cdot \frac{\int_0^l \left(1 - \frac{\Delta S}{S_0}\right) \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx}{\int_0^l \left(1 - \frac{\Delta b}{b_0}\right) \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx},$$

ou, en négligeant les produits et carrés de $\Delta S(x)$ et $\Delta b(x)$,

$$T_k^2 = \frac{4l^2}{k^2 g h_0} \cdot \frac{\int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx}{\int_0^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx} \cdot \left\{ 1 - \frac{\int_0^l \frac{\Delta S}{S_0} \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx} + \frac{\int_0^l \frac{\Delta b}{b_0} \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx}{\int_0^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx} \right\}$$

(où l'on a posé $S_0/b_0 = h_0$).

Remarquant que

$$\int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \int_0^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{2},$$

on peut écrire :

$$T_k^2 = \frac{4l^2}{k^2 g h_0} \left\{ 1 - \frac{1}{l S_0} \int_0^l \Delta S(x) dx + \frac{1}{l S_0} \int_0^l \Delta S(x) \cos \frac{2k\pi x}{l} dx + \frac{1}{l b_0} \int_0^l \Delta b(x) dx + \frac{1}{l b_0} \int_0^l \Delta b(x) \cos \frac{2k\pi x}{l} dx \right\},$$

mais, puisque S_0 et b_0 sont les valeurs moyennes de $S(x)$ et de $b(x)$, on a

$$\int_0^l \Delta S(x) dx = 0, \quad \int_0^l \Delta b(x) dx = 0.$$

De plus, $l b_0 = a$, aire totale du golfe, et $l S_0 = V$, volume total de l'eau qu'il contient.

On pourra donc écrire

$$T_k = \frac{2l}{k \sqrt{g h_0}} \left[1 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\Delta S(x)}{V} + \frac{\Delta b(x)}{a} \right) \cos \frac{2k\pi x}{l} dx \right]. \quad (\text{II.14})$$

C'est la formule de correction cherchée, qui tient compte à la fois des variations de section droite et des variations de largeur. L'expérience montre qu'un rétrécissement (élargissement) de la partie centrale allonge (raccourcit) la période, et qu'un rétrécissement (élargissement) à une extrémité la raccourcit (l'allonge).

§ 10. APERÇU DE QUELQUES TRAVAUX RÉCENTS SUR LES SEICHES.

Depuis 1946 environ, une remarquable équipe de chercheurs italiens, sous la direction du Prof. P. CALOI de l'« Istituto Nazionale di Geofisica » à Rome, s'occupe de l'étude (théorique et expérimentale) des seiches dans les lacs italiens et publie régulièrement ses résultats dans les « Annali di Geofisica », revue de l'Istituto susdit, fondée en 1948.

Une douzaine au moins de lacs d'importance diverse ont ainsi été étudiés : lacs Albano, Bolsena, de Garde, Idro, Iseo, Levico, de Lugano, Majeur, Orta, Santa Croce, Scanno, Vico.

En règle générale, trois méthodes sont mises en œuvre : celle de CHRYSTAL, celle de DEFANT et celle de HIDAOKA; lorsque la forme du lac permet de considérer l'existence d'un bassin ouvert plus ou moins autonome, on applique à ce dernier le procédé de GOLDBERG; c'est le cas notamment pour le golfe de Desenzano dans le lac de Garde.

La méthode de CHRYSTAL, comme il ressort des considérations du chapitre I, est la plus difficile à appliquer. Quand elle n'est pas de forme trop capricieuse, les auteurs décomposent la courbe normale (cf. p. 24) du lac en segments de droite ou de courbes et raccordent les solutions correspondantes, ce qui conduit à des équations aux périodes que l'on doit résoudre par tâtonnements.

Si le nombre de segments dont se composerait ainsi la courbe normale est trop élevé (quatre ou cinq par exemple), les auteurs renoncent habituellement à employer cette première méthode.

Dans l'application de la méthode de RITZ-HIDAOKA, le nombre de fonctions d'essai $\psi_i(v)$ ne dépasse guère trois, pour des raisons pratiques évidentes. Ces fonctions sont invariablement prises égales à $z(1-z)$, $z^2(1-z)$, $z^3(1-z)$ ($z=v/a$), fonctions préconisées par K. HIDAOKA, et qui se prêtent relativement bien au calcul numérique des intégrales

$$\int_0^1 \frac{\psi_i \psi_j}{\sigma(z)} dz \quad (i, j = 1, 2, 3 \dots),$$

mais n'ont pas leurs dérivées orthogonales entre elles (cf. p. 54). Aussi les solutions approchées $u = \sum A_i \psi_i(z)$, que les auteurs obtiennent pour l'équation de CHRYSTAL, s'écartent-elles de plus en plus de celles que fournit la méthode de DEFANT à mesure que croît le nombre de nœuds de la seiche.

La méthode de DEFANT enfin, toujours applicable aux cas que l'on rencontre dans la pratique, est utilisée avec grand soin par les auteurs. Ils effectuent avec précision leurs mesures bathymétriques, multiplient le nombre de sections droites (pas moins de 66 par exemple pour le lac de Garde, long de 50 km mais de forme très régulière dans la plus grande partie de sa longueur; 19 pour le lac d'Albano, de forme à peu près elliptique, long de 3,5 km et large de 2,5 km

environ; 32 pour le lac d'Orta, long de 13,4 km sur 2,5 km de largeur maximum, etc.). Par contre, au lieu de « couper » les baies latérales parfois étendues mais de très faible profondeur et auxquelles par suite l'hypothèse du parallélisme des tranches ne peut guère s'appliquer, les auteurs les font toujours entrer dans leurs calculs. A ce propos, le cas du lac de Lugano ⁽⁷⁶⁾ est typique. Il est probable toutefois que ceci n'affecte qu'assez faiblement les résultats numériques.

D'autre part, un moyen de contrôle intéressant des résultats n'est pas utilisé par les auteurs : c'est la vérification de l'orthogonalité des fonctions propres obtenues. On a vu plus haut (cf. p. 29) que les fonctions $u_1, u_2 \dots$ sont orthogonales entre elles au sens généralisé, c'est-à-dire que l'on a, pour des fonctions normées :

$$\int_0^a \frac{u_i u_j}{\sigma(v)} dv = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{ou} \quad 1 \quad (i = j).$$

Or, la méthode de DEFANT présente sur celles de HIDAHA et de CHRYSTAL l'avantage de fournir point par point les fonctions $u_1, u_2 \dots$. Il était donc tout indiqué de calculer les intégrales en question et de les normer (en les posant égales à 1 pour $i = j$), afin de vérifier cette importante propriété des fonctions propres.

Enfin, les auteurs n'insistent guère sur la supériorité de la méthode d'existence de DEFANT sur les procédés de CHRYSTAL et de HIDAHA, non seulement au point de vue du calcul numérique, mais aussi au point de vue théorique. En effet, la solution construite point par point d'après cette méthode est rigoureuse pour n'importe quel mode normal, dans la mesure où l'on peut négliger les erreurs commises en remplaçant les différentielles par des différences finies. La méthode de RITZ-HIDAHA, au contraire, n'est qu'un procédé d'approximation pour les valeurs propres du paramètre λ , et beaucoup moins bon si l'on s'en sert pour chercher les fonctions propres; souvent excellente pour la valeur propre la plus basse, elle donne des résultats de plus en plus médiocres à mesure qu'on l'applique à la recherche de valeurs propres plus élevées; quant aux fonctions propres qu'elle permet d'obtenir, elles sont certainement moins exactes que celles qu'on peut construire point par point par une méthode d'existence.

En ce qui concerne la méthode de CHRYSTAL, remarquons seulement qu'elle nécessite presque toujours une simplification excessive de la courbe normale du lac pour qu'on puisse procéder à des calculs numériques : en effet, c'est par des raccords de solutions que l'on aboutit à l'équation aux périodes, fort compliquée; cela ne peut manquer d'affecter les périodes, dans une mesure peut-être faible, mais difficilement prévisible; sur ce dernier point aussi, la méthode de DEFANT apparaît donc bien supérieure.

⁽⁷⁶⁾ MARCELLI, L., *Sesse del Lago di Lugano*, Ann. Geof., 1 (1948), pp. 454-475.

CHAPITRE III.

LES SEICHES LONGITUDINALES DU LAC DE GENÈVE.

Dans le présent chapitre, on appliquera quelques-unes des méthodes exposées précédemment au calcul des seiches longitudinales du lac de Genève; l'intérêt de ces calculs sera de montrer le degré de précision avec lequel les méthodes en question permettent de retrouver des résultats expérimentaux établis par de très nombreuses observations, en même temps que de tester la valeur pratique de ces différentes méthodes.

Le lac de Genève, le plus étendu des lacs alpins, présente une superficie d'environ 583 km², dont 234 km² appartiennent à la France et 349 km² à la Suisse. Sa longueur maxima, mesurée le long du Talweg Genève-Villeneuve, est de 74 km; sa largeur maxima, de Morges à Amphion, est de 13,8 km, pour une largeur moyenne de 8 km environ. La profondeur maxima est de 310 m et son altitude moyenne de 372 m au-dessus du niveau de la mer.

§ 1. RÉSULTATS DES OBSERVATIONS.

a) Une oscillation longitudinale uninodale (le fondamental) a été signalée par F. A. FOREL ⁽⁷⁷⁾ et confirmée par de nombreuses observations modernes ⁽⁷⁸⁾. FOREL lui attribue une période de 73 min. 30 sec. (valeur moyenne de ses observations), résultat en bon accord avec les relevés les plus modernes (les valeurs observées vont de 71 min. 30 sec. à 75 min., ce qui fournit une période moyenne extrêmement voisine de celle trouvée par FOREL). Cette seiche a été enregistrée aux stations limnographiques de Cully, Meillerie, Saint-Prex, Hermance, Bellevue, Coppet, Saint-Sulpice, Vevey, Chillon et Genève. Elle n'a pu être observée à Rolle et à Fleur-d'Eau; son nœud par conséquent se trouve dans cette dernière région, c'est-à-dire au voisinage immédiat de l'embouchure du « Petit-Lac ».

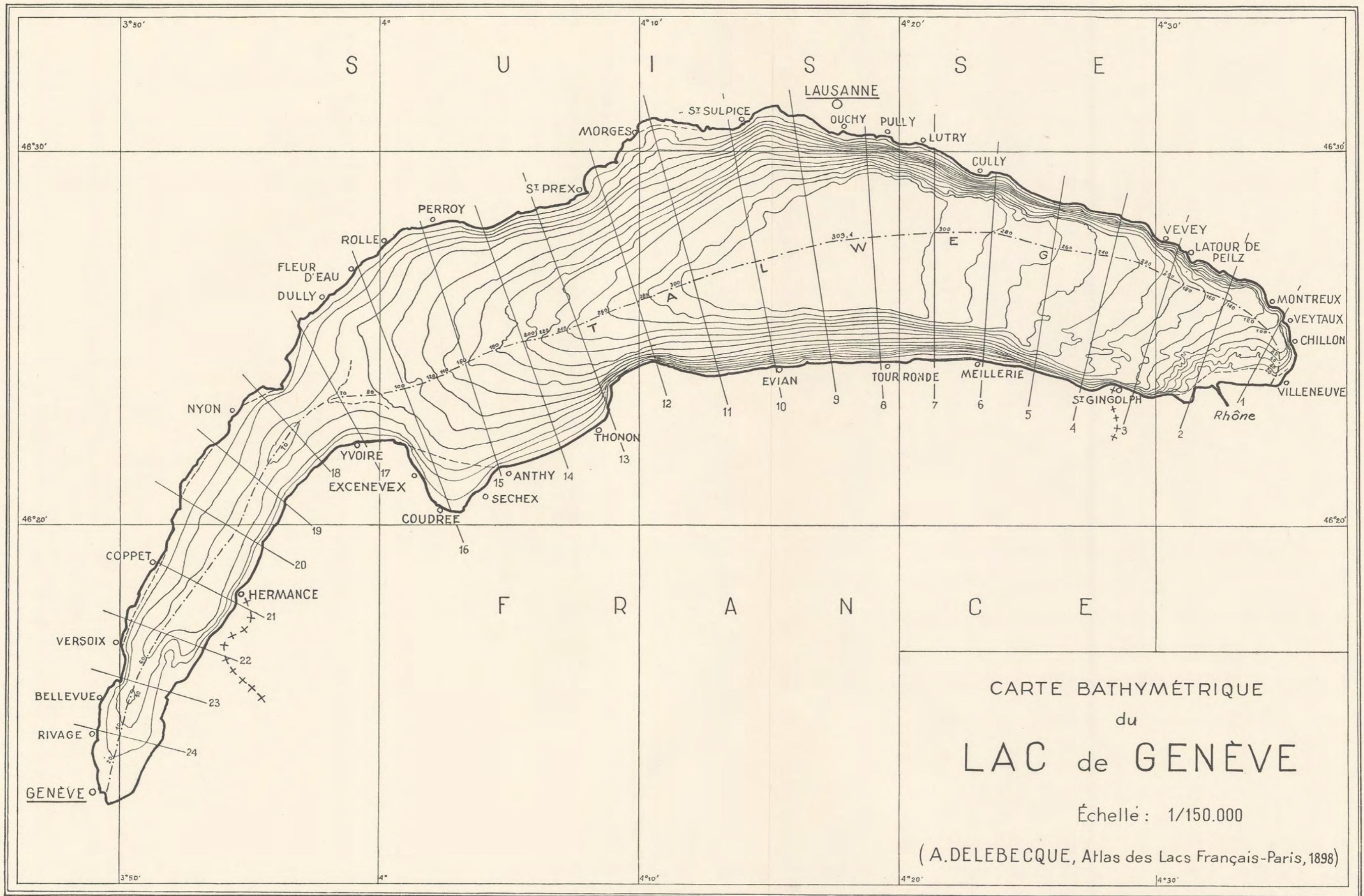
b) L'existence d'une seiche binodale (le second mode) a été également reconnue depuis très longtemps ⁽⁷⁹⁾ et confirmée à nouveau par les observations modernes.

F. A. FOREL lui attribue une période voisine de 35 min. (valeur moyenne de ses observations); les observations modernes fournissent des valeurs allant de 32 min. 30 sec. à 36 min. (peut-être 35 min. 30 sec. ?), d'où une valeur moyenne qui ne s'écarte guère de celle trouvée par FOREL.

⁽⁷⁷⁾ FOREL, F. A., *Le Léman*, II, p. 107.

⁽⁷⁸⁾ Cf. p. ex. les enregistrements du Service Fédéral des Eaux à Berne, notamment le plan n° 14.036 (relevés limnographiques de juillet-août 1950).

⁽⁷⁹⁾ Cf. FOREL, F. A., *op. cit.*, *ibid.*



Cette seiche s'observe entre autres à Rolle, Thonon, Saint-Sulpice, Cully, Vevey, Chillon, Saint-Gingolph, Hermance, Genève; à la station de Morges elle manque régulièrement dans les enregistrements. Son nœud occidental doit se situer dans la partie sud du « Petit-Lac » (entre la ligne Coppet-Hermance et Genève), non loin de la ligne transversale passant par Versoix; quant à son nœud oriental, il est très voisin de la section transversale de Morges.

c) Il existe vraisemblablement des seiches longitudinales de nodalité plus élevée, mais leur débrouillage est très difficile; les observateurs anciens (notamment F. A. FOREL) n'ont pu tirer la chose au clair, et les enregistrements modernes dont on a pu disposer pour le présent travail (cf. note 78) ne sont guère suffisants pour résoudre le problème de manière satisfaisante. Etant donné, d'autre part, le but des présents calculs sur le lac de Genève, on se contentera de calculer les périodes et les amplitudes relatives des deux premiers modes (seiches uninodale et binodale) du lac, qui d'ailleurs sont de loin les plus importants.

§ 2. DONNÉES BATHYMÉTRIQUES ET GÉOGRAPHIQUES.

Le lac a été divisé en vingt-cinq tronçons, de longueur pratiquement égale, et numérotés de 1 à 25, d'est en ouest (cf. pl. I).

Les tronçons 1 à 16 constituent le « Grand-Lac » et les tronçons 17 à 25 le « Petit-Lac ». La carte utilisée est celle publiée par A. DELEBECQUE dans son « Atlas des Lacs français » (Paris, 1898), à l'échelle 1/100.000^e; elle fournit les isobathes de 20 en 20 m, ce qui est amplement suffisant pour les calculs proposés.

Dans la table de mesures qui suit, le contour du lac a été légèrement « rectifié », afin de rendre le lac plus conforme à ce qu'exige l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides (cf. p. 19); la surface ainsi « rognée » ne comprend que 23 km² environ, soit moins de 4 % de la surface totale du lac, et représente, au point de vue des oscillations, des « eaux-mortes »; le rôle physique de celles-ci est de ralentir le mouvement oscillatoire; leur suppression dans les calculs aura donc pour effet de raccourcir les périodes. On pourra se rendre compte par les calculs effectués sur le Tanganika (cf. pp. 123 et 134 sqq.) que cet effet est faible. Les « rectifications » du contour sont indiquées sur la carte en traits interrompus.

Section n°	Δx km	x km	$S(x)$ km ²	$b(x)$ km	$\sigma(v)$ 10 ⁹ m ³	$\beta(x)$ km ⁽⁸⁰⁾	$\tau(v)=S.\beta$ 10 ⁹ m ³	Δv km ²	$v(x)$ km ²
1	1,5	1,5	0,175	2,8	0,490	2,133	0,373	3,2	3,2
2	3	4,5	0,485	5,2	2,522	3,867	1,875	11,6	14,8
3	3	7,5	1,197	7,8	9,337	6,300	7,541	18,9	33,7
4	3	10,5	1,714	8,9	15,255	8,000	13,712	24,0	57,7
5	3	13,5	1,800	8,0	14,400	8,133	14,639	24,4	82,1

Le graphique ci-après (fig. 10) représente la « courbe normale » du lac (cf. p. 24).

(80) Pour l'usage des grandeurs $\beta(x)$ et $\tau(v)$, cf. p. 98.

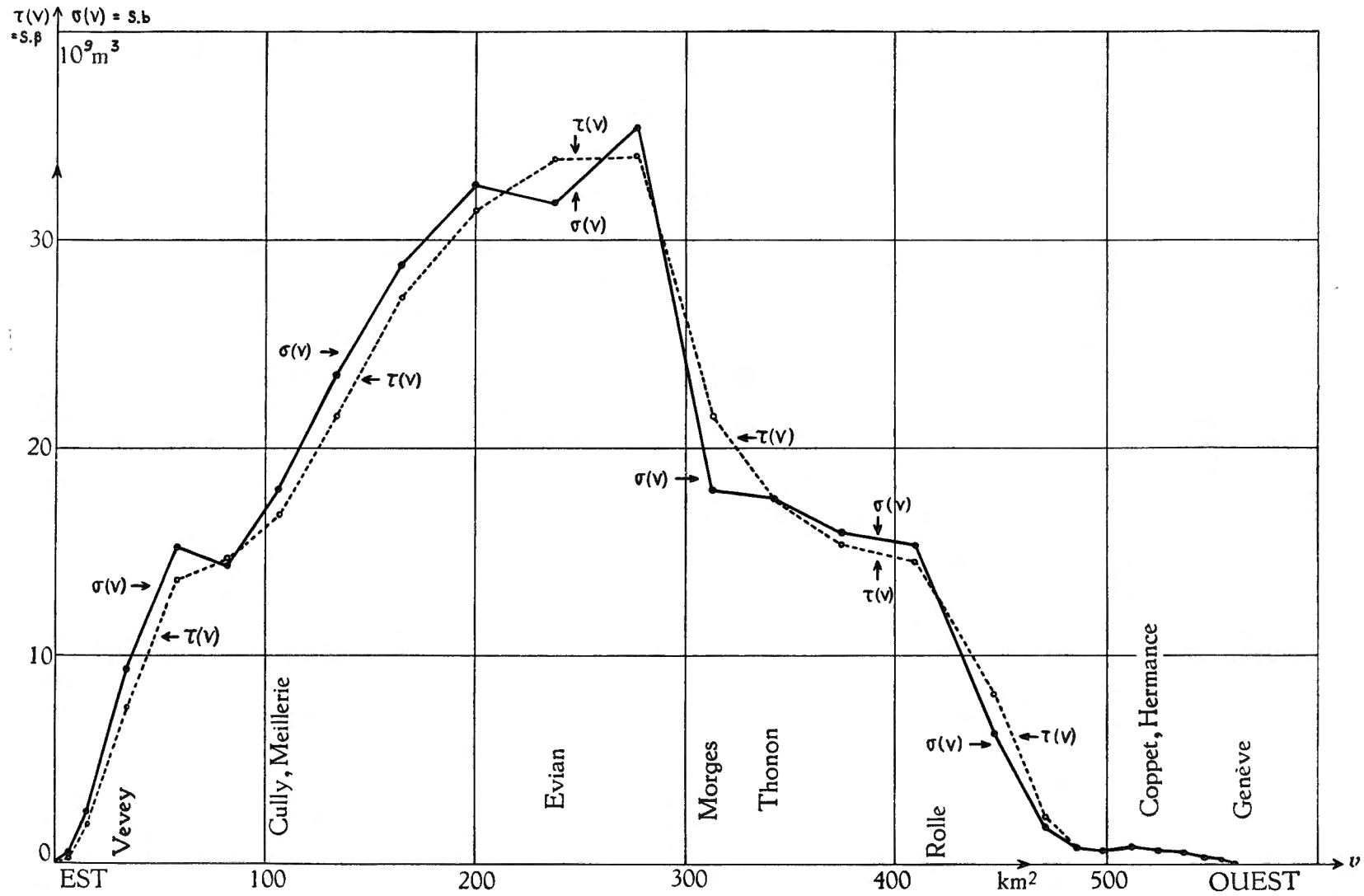


FIG. 10. — Lac de Genève. Courbe normale (contour « rectifié »).

Section n°	Δx km	x km	$S(x)$ km ²	$b(x)$ km	$\sigma(v)$ 10 ⁶ m ³	$\beta(x)$ km	$\tau(v)=S.\beta$ 10 ⁹ m ³	Δv km ²	$v(x)$ km ²
6	3	16,5	2,071	8,7	18,018	8,100	16,775	24,3	106,4
7	3	19,5	2,359	10,0	23,590	9,133	21,545	27,4	133,8
8	3	22,5	2,625	11,0	28,875	10,367	27,213	31,1	164,9
9	3	25,5	2,704	12,1	32,718	11,633	31,456	34,9	199,8
10	3	28,5	2,674	11,9	31,821	12,667	33,872	38,0	237,8
11	3	31,5	2,611	13,6	35,510	13,033	34,029	39,1	276,9
12	3	34,5	1,788	10,1	18,059	12,067	21,576	36,2	313,1
13	3	37,5	1,744	10,1	17,614	10,100	17,614	30,3	343,4
14	3	40,5	1,465	10,9	15,968	10,500	15,382	31,5	374,9
15	3	43,5	1,273	12,1	15,403	11,500	14,639	34,5	409,4
16	3	46,5	0,657	9,7	6,373	12,400	8,147	37,2	446,6
17	3	49,5	0,293	6,3	1,846	8,100	2,373	24,3	470,9
18	3	52,5	0,197	4,0	0,788	5,000	0,985	15,0	485,9
19	3	55,5	0,165	4,2	0,693	4,267	0,704	12,8	498,7
20	3	58,5	0,186	4,4	0,818	4,400	0,818	13,2	511,9
21	3	61,5	0,175	4,0	0,700	4,200	0,735	12,6	524,5
22	3,1	64,6	0,169	3,8	0,642	3,806	0,643	11,8	536,3
23	3	67,6	0,065	2,2	0,143	3,267	0,212	9,8	546,1
24	3	70,6	0,047	3,0	0,141	2,600	0,122	7,8	553,9
25	3,3	73,9	0	0	0	1,879	0	6,2	560,1

§ 3. CALCUL DES SEICHES PAR LA MÉTHODE D'EXISTENCE DE A. DEFANT.

a) Recherche du mode fondamental. — Deux premiers essais, effectués respectivement avec $\lambda_1 = 2,117 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ (c'est-à-dire $T_1 = 4.360 \text{ sec.} = 72 \text{ min. } 40 \text{ sec.}$; à la latitude du lac, $g = 981 \text{ cm sec.}^{-2}$) et $\lambda_1 = 2,133 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ (c'est-à-dire $T_1 = 4.344 \text{ sec.} = 72 \text{ min. } 24 \text{ sec.}$), avaient laissé des « résidus » respectifs de $u_{25} = 8,8373 \times 10^6 \text{ m}^3$ ($\zeta_0 = 100 \text{ cm}$, valeur arbitraire) et $u_{25} = 7,0106 \times 10^6 \text{ m}^3$.

Les résultats ci-après sont obtenus avec $\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ ($T_1 \simeq 4.277 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 17 \text{ sec.}$) et $\lambda_1 = 2,19 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ ($T_1 \simeq 4.287 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 27 \text{ sec.}$). En vue d'essayer la stabilité de la méthode, on a effectué les calculs relatifs à la première valeur propre $\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ une première fois en partant de l'est et une seconde fois en partant de l'ouest; la concordance des résultats ainsi obtenus est excellente, et l'on retiendra la valeur de $\lambda_1 = 2,19 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$.

Voici les essais avec :

$\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ ($T_1 \simeq 4.277 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 17 \text{ sec.}$) : est-ouest.

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	ξ 10^2 cm	$\Delta\zeta$ cm
1	100,0000	3,2000	18,2857	- 0,6034
2	99,3966	14,7300	30,3711	- 2,0045
3	97,3921	33,1371	27,6835	- 1,8271
4	95,5650	56,0727	32,7145	- 2,1592
5	93,4058	78,8637	43,8132	- 2,8917
6	90,5141	100,8586	48,7004	- 3,2142
7	87,2999	124,7788	52,8948	- 3,4911
8	83,8088	150,8433	57,4641	- 3,7926
9	80,0162	178,7690	66,1128	- 4,3634
10	75,6528	207,5171	77,6055	- 5,1220
11	70,5308	235,0946	90,0401	- 5,9426
12	64,5882	258,4755	144,5613	- 9,5410
13	55,0472	275,1548	157,7722	- 10,4130
14	44,6342	289,2146	197,4161	- 13,0295
15	31,6047	300,1182	235,7567	- 15,5599
16	16,0448	306,0869	465,8857	- 30,7485
17	- 14,7037	302,5139	1.032,4707	- 68,1431
18	- 82,8468	290,0869	1.472,5223	- 97,1865
19	-180,0333	267,0427	1.618,4406	-106,8171
20	-286,8504	229,1784	1.232,1419	- 81,3214
21	-368,1718	182,7888	1.044,5074	- 68,9375
22	-437,1093	131,2099	776,3900	- 52,9498
23	-490,0591	83,1841	1.279,7554	- 84,4639
24	-574,5230	38,3713	816,4106	- 53,8831
25	-628,4061	-0,5899	—	—

$\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ ($T_1 \simeq 4.277 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 17 \text{ sec.}$) : ouest-est.

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	ξ 10^2 cm	$\Delta\zeta$ cm
25	100,0000	6,2000	131,9149	- 9,5770
24	92,4230	13,2530	203,8922	-13,4569
23	76,9661	20,7957	123,0513	- 8,1214
22	68,8447	28,9194	165,2536	-11,2703
21	57,5744	36,1738	194,4827	-12,8359
20	44,7385	42,0793	255,0260	-16,8317
19	27,9068	45,6514	231,7328	-15,2944
18	12,6124	47,5433	162,2637	-10,7094
17	1,9030	48,0057	73,0681	- 4,8225
16	- 2,9195	46,9196	36,8575	- 2,4326

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	ξ 10^2 cm	$\Delta\zeta$ cm
15	- 5,3521	45,0731	30,7666	- 2,0306
14	- 7,3827	42,7476	24,5112	- 1,6177
13	- 9,0004	40,0205	22,3828	- 1,4773
12	-10,4777	36,2276	13,8750	- 0,9157
11	-11,3934	31,7728	11,8821	- 0,7842
10	-12,1776	27,1453	10,0389	- 0,6626
9	-12,8402	22,6641	8,6339	- 0,5689
8	-13,4100	18,4936	7,8396	- 0,5174
7	-13,9274	14,6775	7,0872	- 0,4678
6	-14,3952	11,1795	6,2108	- 0,4099
5	-14,8051	7,5671	4,4149	- 0,2914
4	-15,0965	3,9440	3,2949	- 0,2175
3	-15,3140	1,0497	2,1643	- 0,1428
2	-15,4568	- 0,7433	-4,2474	0,2803
1	-15,1765	- 1,2289	—	—

$\lambda_1 = 2,19 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ ($T_1 \simeq 4.287 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 27 \text{ sec.}$) : ouest-est.

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	ξ 10^2 cm	$\Delta\zeta$ cm
25	100,0000	6,2000	131,9149	- 9,5335
24	90,4665	13,2564	203,9444	-13,3991
23	77,0674	20,8090	123,1302	- 8,0897
22	68,9777	28,9484	165,4192	-11,2303
21	57,7474	36,2246	194,7558	-12,7955
20	44,9519	42,1583	255,5046	-16,7867
19	28,1652	45,7634	232,3018	-15,2622
18	12,9030	47,6988	162,7947	-10,6956
17	2,2074	48,2352	73,4173	- 4,8235
16	- 2,6161	47,2620	37,1265	- 2,4392
15	- 5,0553	45,5179	31,0702	- 2,0413
14	- 7,0966	43,2825	24,8179	- 1,6305
13	- 8,7271	40,6382	22,7283	- 1,4932
12	-10,2203	36,9385	14,1473	- 0,9295
11	-11,1498	32,5789	12,1836	- 0,8005
10	-11,9503	28,0378	10,3690	- 0,6812
9	-12,6315	23,6294	9,0017	- 0,5914
8	-13,2229	19,5171	8,2735	- 0,5436
7	-13,7665	15,7451	7,6027	- 0,4995
6	-14,2660	12,2785	6,8214	- 0,4482
5	-14,7142	8,6882	5,0690	- 0,3330
4	-15,0472	5,0769	4,2414	- 0,2787
3	-15,3259	2,1803	4,4955	- 0,2954
2	-15,6213	0,3683	2,1046	- 0,1383
1	-15,7596	- 0,1360	—	—

Comparons la période ainsi obtenue (en retenant la valeur propre $\lambda_1 = 2,19 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, c'est-à-dire $T_1 = 71 \text{ min. } 27 \text{ sec.}$) avec les données expérimentales ($T_1 = 73 \text{ min. } 30 \text{ sec.}$) : l'écart est inférieur à $-2,8 \%$, ce qui est tout à fait satisfaisant. La chose est d'autant plus remarquable qu'aux extrémités du lac, on a imposé la condition-frontière du déplacement horizontal nul ($\partial\zeta/\partial x = 0$) au lieu d'imposer le mouvement tangentiel au fond ($\zeta = \xi \partial h / \partial x$); la valeur du rapport ζ/ξ (0,055 à l'extrémité est, et 0,0075 environ à l'extrémité ouest) indique l'existence d'un mouvement horizontal non négligeable; le rapport $-\Delta h/\Delta x$ a respectivement aux extrémités est et ouest les valeurs 0,033 et 0,005 environ. A. T. DOODSON et ses collaborateurs, dans leur travail théorique sur les seiches du LÉMAN ⁽⁸¹⁾ suivant une méthode exposée plus haut (pp. 81-83) et qui nécessitait des calculs beaucoup plus longs (ils ont effectué jusqu'à 200 divisions longitudinales, alors que les calculs effectués ici n'en utilisent que 25) avaient trouvé $T_1 = 4.467 \text{ sec.} = 74 \text{ min. } 27 \text{ sec.}$, soit un résultat s'écartant de 1,3 % environ de la valeur moyenne des observations.

Le nœud se trouve approximativement à mi-distance entre les 16° et 17° sections droites, c'est-à-dire à 1,5 km environ à l'ouest de la ligne transversale passant par Fleur-d'Eau. A. T. DOODSON et ses collaborateurs le placent à 2 km à l'ouest de cette même ligne. Ici encore l'accord avec les données expérimentales est excellent.

b) Second mode (seiche binodale). — Deux essais effectués respectivement avec $\lambda_2 = 9,0 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ ($T_2 \simeq 2.115 \text{ sec.} = 35 \text{ min. } 15 \text{ sec.}$) et $\lambda_2 = 9,2 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ ($T_2 \simeq 2.091 \text{ sec.} = 34 \text{ min. } 51 \text{ sec.}$) avaient laissé des « résidus » respectifs de $u_{25} = -1,5127 \times 10^6 \text{ m}^3$ et $0,8662 \times 10^6 \text{ m}^3$; une interpolation linéaire conduit ainsi à essayer la valeur propre $\lambda_2 = 9,127 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ ($T_2 \simeq 2.095 \text{ sec.} = 34 \text{ min. } 55 \text{ sec.}$); cette valeur sera adoptée comme « exacte ».

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	ξ 10^2 cm	$\Delta\zeta$ cm
1	100,0000	3,2000	18,2857	- 2,5034
2	97,4966	14,5096	29,9167	- 8,1915
3	89,3051	31,3883	26,2224	- 7,1800
4	82,1251	51,0983	29,8123	- 8,1629
5	73,9622	69,1451	38,4139	-10,5181
6	63,4441	84,5620	40,8315	-11,1801
7	52,2640	98,8823	41,9171	-11,4773
8	40,7867	111,5670	42,5017	-11,6374
9	29,1493	121,7401	45,0222	-12,3275
10	16,8218	128,1324	47,9179	-13,1204

⁽⁸¹⁾ DOODSON, A. T., CAREY, R. M. and BALDWIN, R., *Theoretical Determination of the Longitudinal Seiches of Lake Geneva*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 52 (1920), pp. 629-642.

Section n°	ζ cm	u $10^6 m^3$	ξ $10^2 cm$	$\Delta\zeta$ cm
11	3,7014	129,5796	49,6284	-13,5888
12	9,8874	126,0004	70,4700	-19,2954
13	- 29,1828	117,1580	67,1778	-18,3940
14	- 47,5768	102,1713	69,7415	-19,0959
15	- 66,6737	79,1692	62,1910	-17,0285
16	- 83,7012	48,0324	73,1087	-20,0179
17	-103,7191	22,8287	77,9137	-21,3335
18	-125,0526	4,0708	20,6640	- 5,6580
19	-130,7106	-12,6602	- 76,7282	21,0089
20	-109,7017	-27,1408	-145,9184	39,9539
21	- 69,7478	-35,9290	-205,3087	56,2156
22	- 13,5322	-37,5258	-222,0462	62,8251
23	49,2929	-37,6951	-503,0015	137,7268
24	187,0197	-18,1076	-385,2681	105,4903
25	292,5100	0,0280	—	—

En retenant comme « exacte » la valeur $T_2 = 2.095$ sec. = 34 min. 55 sec., on a un résultat qui s'écarte très peu de la moyenne des valeurs expérimentales (35 min. 30 sec.), de moins de -1,7 %; le résultat obtenu par A. T. Doonson (cf. note 81) est $T_2 = 2.106$ sec. (erreur de 1 % seulement par rapport aux résultats expérimentaux). Le nœud occidental se trouve, conformément aux résultats expérimentaux, sur la ligne transversale passant par Versoix (sud du « Petit-Lac »); quant au nœud oriental, il est situé sur la ligne transversale passant par Morges, ce qui est à nouveau un accord parfait avec les observations.

c) Vérification de l'orthogonalité des deux premiers modes. Une première manière de procéder consiste à calculer, par la méthode des rectangles, les intégrales :

$$\int_0^a \frac{u_1^2(v)}{\sigma(v)} dv \quad \int_0^a \frac{u_2^2(v)}{\sigma(v)} dv \quad \int_0^a \frac{u_1 u_2}{\sigma(v)} dv,$$

la norme étant définie comme la racine carrée du produit des deux premières; on divise ensuite la dernière par la norme, et si le quotient est très petit devant 1, l'orthogonalité peut être considérée comme satisfaisante (cf. pp. 29-30).

Voici les résultats des calculs :

Section n°	$\frac{u_1^2 \Delta v}{\sigma(v)}$ $10^9 m^5$	$\frac{u_2^2 \Delta v}{\sigma(v)}$ $10^9 m^5$	$\frac{u_1 u_2 \Delta v}{\sigma(v)}$ $10^9 m^5$
1	66,87	66,87	66,87
2	997,97	968,33	983,04
3	2.222,71	1.994,30	2.105,38
4	4.946,54	4.107,85	4.507,72
5	10.538,65	8.101,21	9.239,71

Section n°	$\frac{u_1^2 \Delta v}{\sigma(v)}$	$\frac{u_2^2 \Delta v}{\sigma(v)}$	$\frac{u_1 u_2 \Delta v}{\sigma(v)}$
	10^9 m^5	10^9 m^5	10^5 m^9
6	13.719,21	9.643,84	11.502,38
7	18.084,46	11.356,83	14.331,16
8	24.506,92	13.406,33	18.125,92
9	34.089,70	15.809,03	23.214,78
10	51.425,34	19.605,82	31.752,83
11	60.857,33	18.488,51	33.543,43
12	132.923,04	31.824,09	65.283,83
13	130.238,51	25.611,77	55.454,41
14	165.006,74	20.592,80	58.291,94
15	201.742,71	14.038,68	53.218,43
16	546.875,90	13.466,90	85.817,96
17	1.204.662,89	6.820,20	90.907,82
18	1.601.849,05	315,45	22.478,80
19	1.317.161,74	2.960,36	- 62.445,12
20	847.552,31	11.886,83	-100.372,84
21	601.412,76	23.236,07	-118.213,67
22	316.432,26	25.882,54	- 90.499,50
23	474.209,97	73.258,05	-186.385,89
24	81.449,52	18.138,32	- 38.436,42
25	—	—	—
Totaux	7.843.973,11	369.560,95	- 15.527,03

La norme définie ci-dessus est égale à $1.702.593,01 \times 10^9 \text{ m}^5$, et le quotient du dernier total (souligné) par cette norme est égal à $-0,00912$, valeur qui permet de conclure à une orthogonalité satisfaisante des deux premiers modes d'oscillation.

La deuxième manière de vérifier l'orthogonalité des fonctions propres u_1 et u_2 consiste à utiliser, au lieu de la largeur $b(x)$, une largeur « moyenne » $\beta(x)$, définie par $\beta(x_i) = \Delta v(x_i) / \Delta x_i$. Cela simplifie un peu les calculs, puisque les expressions $u_j u_k \Delta v / \tau(v)$ — en écrivant $\tau(v)$ à la place de $\sigma(v)$ pour désigner $S(x) \beta(x)$ — deviennent $u_j \xi_k \Delta x$, en remarquant que $u = S \xi$, ce qui dispense d'effectuer des divisions et permet l'emploi de la règle de SIMPSON pour les intégrations, les intervalles Δx_i étant tous égaux à 3 km (à l'exception du premier et des derniers).

On obtient alors le tableau suivant, où l'on a calculé séparément $u_1 \xi_2$ et $u_2 \xi_1$ à titre de vérification; la concordance de ces résultats est pratiquement parfaite.

Section n°	$u_1 \xi_1$	$u_2 \xi_2$	$u_1 \xi_2$	$u_2 \xi_1$
	10^{16} m^4	10^{16} m^4	10^{16} m^4	10^{16} m^4
1	58,53	58,53	58,53	58,53
2	447,35	434,14	440,67	440,67
3	917,32	823,05	868,93	868,93
4	1.834,05	1.523,29	1.671,45	1.671,48
5	3.454,86	2.656,05	3.029,48	3.029,45

Section n°	$u_1 \xi_1$ 10^{16} m^4	$u_2 \xi_2$ 10^{16} m^4	$u_1 \xi_2$ 10^{16} m^4	$u_2 \xi_1$ 10^{16} m^4
6	4.911,88	3.452,58	4.118,11	4.118,07
7	6.599,61	4.145,05	5.230,36	5.230,36
8	8.667,27	4.741,72	6.411,13	6.411,09
9	11.818,48	5.480,73	8.048,23	8.048,23
10	16.105,63	6.139,99	9.944,36	9.944,17
11	20.267,10	6.431,06	11.667,52	11.667,38
12	37.365,87	8.879,22	18.214,77	18.214,69
13	43.410,42	7.870,81	18.484,58	18.484,33
14	57.095,84	7.125,34	20.170,29	20.170,19
15	70.756,29	4.923,58	18.664,64	18.664,65
16	142.604,27	3.511,47	22.377,71	22.377,62
17	312.332,50	1.778,69	23.570,08	23.570,26
18	427.163,33	84,09	5.993,26	5.993,16
19	432.188,22	971,40	-20.489,98	-20.489,45
20	282.381,85	3.960,27	-33.441,95	-33.441,57
21	190.925,98	7.376,79	-37.528,23	-37.528,09
22	101.870,13	8.320,21	-29.134,66	-29.134,81
23	106.449,60	16.448,10	-41.841,55	-41.841,43
24	31.317,49	6.977,24	-14.783,12	-14.783,23
25	—	—	—	—

En intégrant par la règle de SIMPSON (le premier intervalle avec $\Delta x = 1,5 \text{ km}$, étant traité à part, comme un triangle), on obtient les résultats suivants :

$$\int_0^l u_1 \xi_1 dx = 7.019.607,99 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_2 \xi_2 dx = 345.530,12 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_1 \xi_2 dx = -17.616,49 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_2 \xi_1 dx = -17.615,23 \times 10^9 \text{ m}^5.$$

La norme est égale à $1.557.396,75 \times 10^9 \text{ m}^5$, et les quotients des deux dernières intégrales par cette norme sont tous deux égaux à $-0,01311$, résultat voisin de celui obtenu par le premier procédé [emploi de $\sigma(v)$].

En intégrant par rectangles, on obtient :

$$\int_0^l u_1 \xi_1 dx = 6.906.742,00 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_2 \xi_2 dx = 342.252,56 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_1 \xi_2 dx = 5.146,19 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_2 \xi_1 dx = 5.146,40 \times 10^9 \text{ m}^5.$$

La norme est maintenant égale à $1.537.482,85 \times 10^9 \text{ m}^5$, et les quotients des deux dernières intégrales par cette norme sont tous deux égaux à 0,00335, résultat nettement différent du précédent, mais permettant, comme du reste ce dernier, de conclure à une orthogonalité satisfaisante.

Voici, pour terminer, les courbes représentant les fonctions propres des deux premières modes, calculés par la méthode de DEFANT, ainsi qu'un graphique (voir p. 102) donnant les profils de ces deux seiches. L'exagération des amplitudes dans le « Petit-Lac » est conforme aux résultats expérimentaux.

Il est intéressant de noter que le « Petit-Lac », dont la masse d'eau représente 3,5 % seulement de la masse d'eau totale, oscille donc, en ce qui concerne le mode fondamental, à peu près comme un bassin quart-d'onde ouvert sur une masse d'eau infinie; en d'autres termes, l'énergie cinétique du « Grand-Lac » est, pour ce mode, pratiquement négligeable devant celle du « Petit-Lac ».

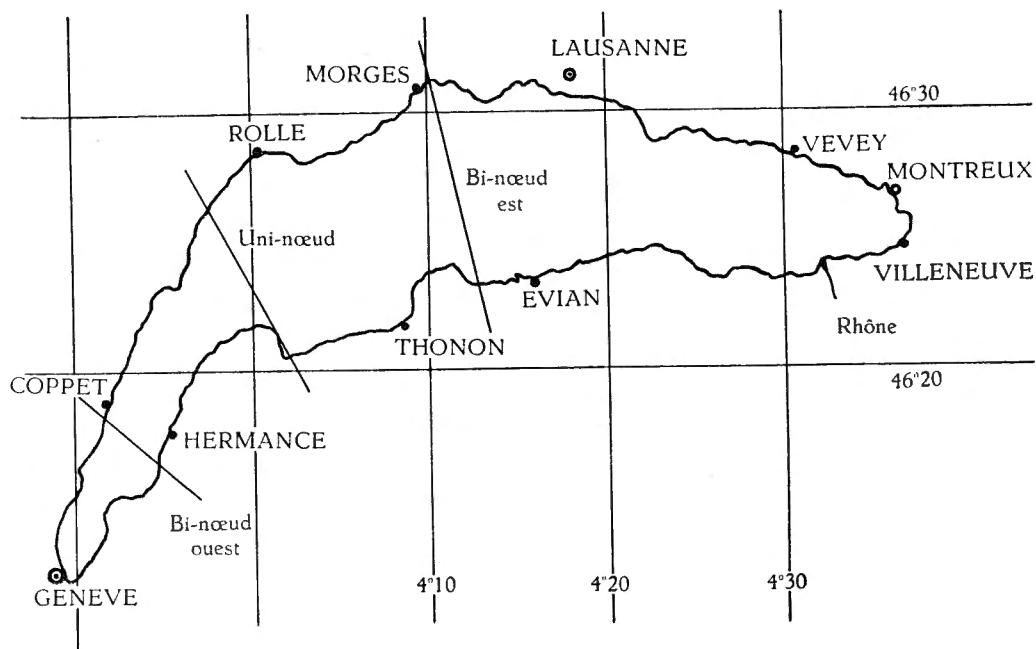


FIG. 11. — Lac de Genève. Carte approximative.
Positions des lignes nodales trouvées par la méthode de DEFANT (contour « rectifié »).

§ 4. CALCUL DU MODE FONDAMENTAL PAR LA FORMULE DE DU BOYS.

$$T_1 = 2 \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}} \quad (82)$$

Il est instructif de calculer par cette formule simple le fondamental du lac de Genève.

(82) Pour cette formule, cf. p. 9.

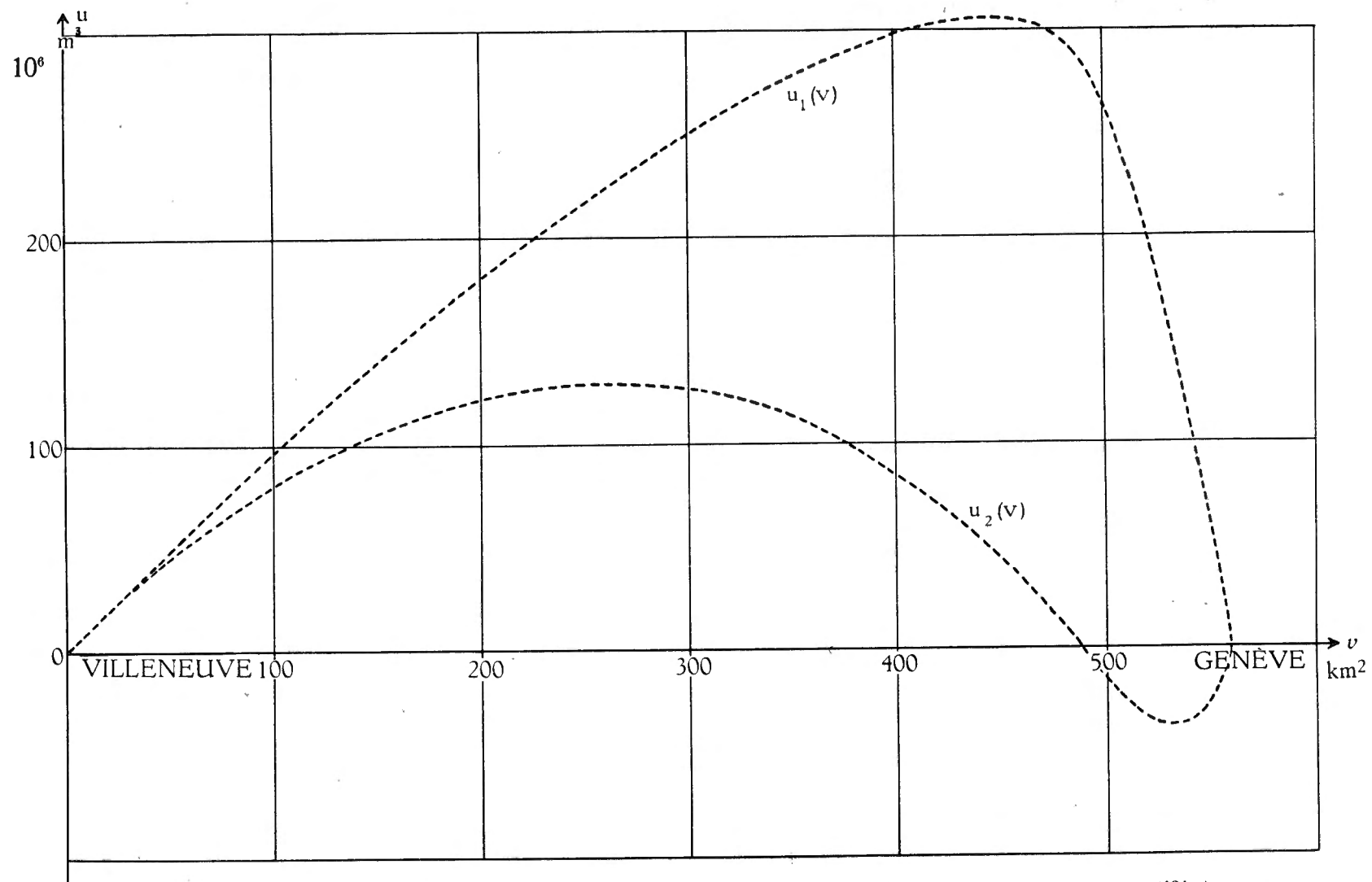


FIG. 12. — Lac de Genève. Fonctions propres des 1^{er} et 2^e modes longitudinaux (méthode de DEFANT; contour « rectifié »).

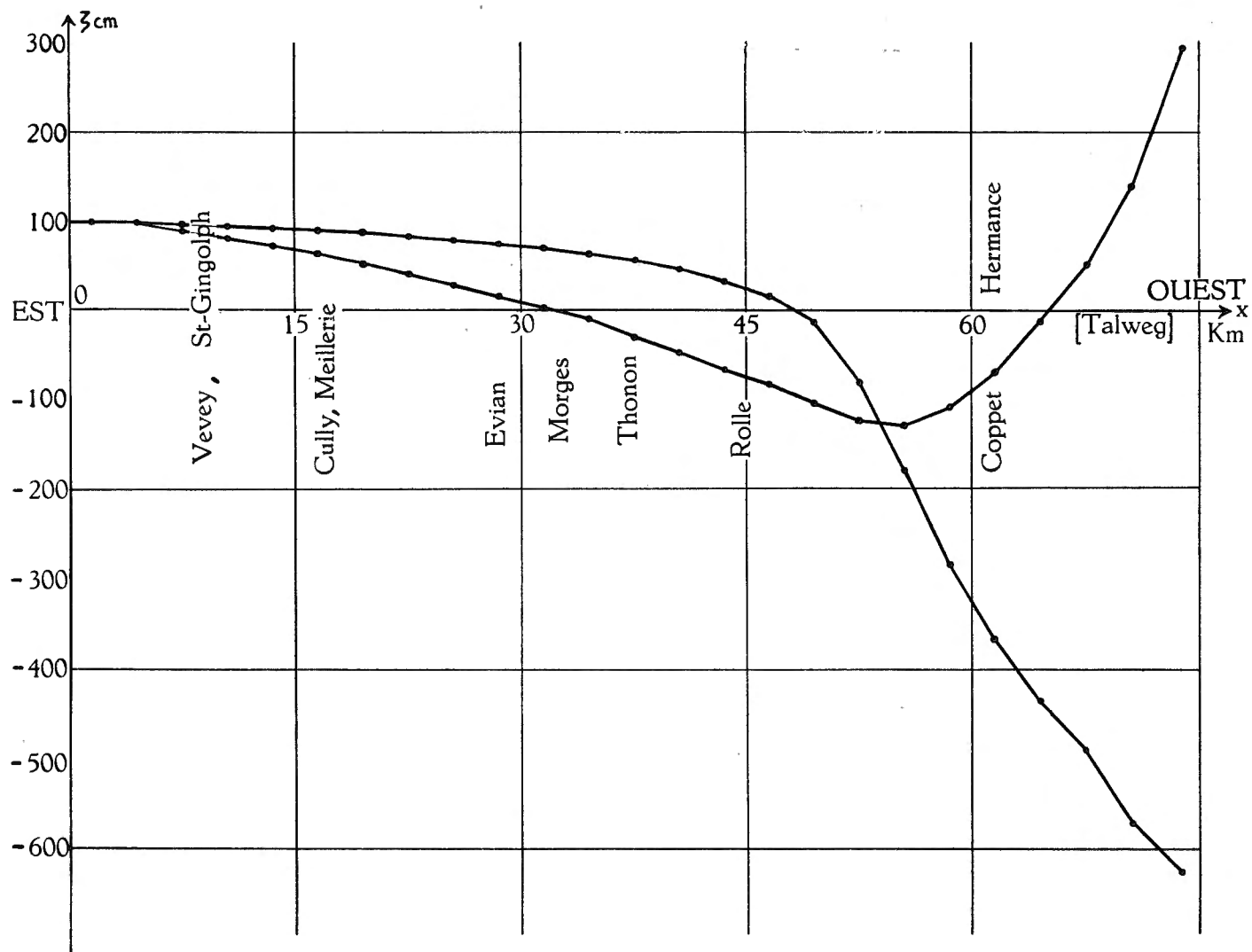


FIG. 13. — Lac de Genève. Profil des seiches unimodale et bimodale longitudinales (méthode de DEFANT; contour « rectifié »).

La profondeur $h(x)$ est mesurée sur le Talweg; l'on a pris, pour le k^e compartiment, une valeur $h(x)$ moyenne arithmétique entre $h(x_{k-1})$ et $h(x_k)$, profondeurs maxima des sections droites limitant ce compartiment. Dès lors, il n'y a pas lieu d'appliquer la règle de SIMPSON, et l'on peut intégrer simplement par rectangles. Voici les résultats :

Section n°	$h(x)$ 10 ² cm	$\frac{1}{\sqrt{h(x)}}$ 10 ⁻¹ cm ^{-½}	Section n°	$h(x)$ 10 ² cm	$\frac{1}{\sqrt{h(x)}}$ 10 ⁻¹ cm ^{-½}
1	40 (60)	0,158118 (0,129099)	14	230	0,065930
2	110 (120)	0,095347 (0,091291)	15	180	0,074538
3	160	0,079058	16	120	0,091291
4	200 (210)	0,070710 (0,069006)	17	80	0,111807
5	240 (250)	0,067422 (0,063246)	18	65 (70)	0,124035 (0,119523)
6	270	0,060855	19	65 (70)	0,124035 (0,119523)
7	290	0,058722	20	60	0,129099
8	300	0,057733	21	60	0,129099
9	300 (305)	0,057733 (0,057260)	29	60	0,129099
10	300 (305)	0,057733 (0,057260)	23	50	0,141423
11	300	0,057733	24	40	0,158118
12	280	0,059763	25	16	0,250000
13	260	0,062016			

Dans certains cas, la profondeur $h(x)$ est difficile à apprécier (divisions 1, 2, 4, 5, 9, 10, 18, 19); les données entre parenthèses désignent alors des mesures aussi probables que les autres.

En multipliant les valeurs $1/\sqrt{h(x)}$ par Δx et en additionnant, on trouve : $\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} = 6,839574 \times 10^4 \text{ cm}^{½}$ (ou, en utilisant chaque fois les données entre parenthèses : $6,736327 \times 10^4 \text{ cm}^{½}$); multipliant encore par $2/\sqrt{g} = 0,63855 \times 10^{-1} \text{ cm}^{-½} \text{ sec.}$, il vient : $T_1 = 4.367 \text{ sec.}$ (4.301 sec.) résultat qui s'écarte de la valeur observée $T_1 = 4.410 \text{ sec.}$ de moins de 1 % (2,5 %).

On voit donc que malgré sa simplicité, la formule de Du Boys fournit ici un résultat comparable à celui obtenu par des calculs beaucoup plus longs à l'aide de la méthode de DEFANT.

§ 5. CALCUL DU MODE FONDAMENTAL PAR LA MÉTHODE DE W. E. MILNE.

A titre de contrôle, on résoudra ici l'équation (I.10) pour le lac de Genève au moyen des formules (II.4) et (II.5), en se bornant au mode fondamental.

Une table de $\sigma(v)$, construite pour des Δv constants, est indispensable pour ces calculs; étant donné le peu de précision des mesures bathymétriques, on a cru pouvoir se contenter d'interpolations linéaires dans la table des pages 91-92.

Δv , constant, est pris égal à 22,4 km²; on obtient ainsi 25 compartiments, de surface libre égale. Les $S(x)$ et $b(x)$ n'interviennent plus dans les calculs, pas plus que ξ et Δx .

Voici la table de $\sigma(v)$ pour le lac de Genève.

Section n°	$v(x)$ km ²	$\sigma(v)$ 10 ⁹ m ³	Section n°	$v(x)$ km ²	$\sigma(v)$ 10 ⁹ m ³
1	22,4	5,262	14	313,6	18,052
2	44,8	12,074	15	336	17,723
3	67,2	14,922			
4	89,6	15,517	16	358,4	16,830
5	112,0	19,157	17	380,8	15,871
			18	403,2	15,505
6	134,4	23,692	19	425,6	11,470
7	156,8	27,498	20	448,0	6,112
8	179,2	30,449			
9	201,6	32,676	21	470,4	1,824
10	224,0	32,147	22	492,8	0,737
			23	515,2	0,787
11	246,4	32,632	24	537,6	0,576
12	268,8	34,764	25	560	0
13	291,2	28,617			

a) Calcul du fondamental longitudinal du lac de Genève à l'aide de la formule :

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} - \frac{\lambda \Delta v^2}{\sigma_n} u_n. \quad (\text{II.4})$$

Valeur d'essai : $\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, $(\lambda_1 \Delta v^2 = 11.038,72 \times 10^{10} \text{ cm}^3)$.

Pour u_1 , on prendra arbitrairement une valeur égale à celle trouvée au même point par la méthode de DEFANT (valeur calculée par interpolation linéaire), ceci afin de permettre la comparaison entre les résultats.

Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ 10 ⁶ m ³	Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ 10 ⁶ m ³
—	0	0	0,004659	6	125,5902
			0,004014	7	144,5690
			0,003625	8	162,9675
0,020978	1	22,1317 (arbitraire)	0,003378	9	180,7752
0,009143	2	43,7991	0,003434	10	197,9722
0,007398	3	65,0660			
0,007114	4	85,8515			
0,005762	5	106,0263	0,003383	11	214,4894

Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ 10^6 m^3	Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ 10^6 m^3
0,003175	12	230,2810	0,009624	19	303,5675
0,003857	13	245,3415	0,018061	20	305,4685
0,006115	14	259,4557			
0,006228	15	271,9833	0,060519	21	301,8524
			0,149779	22	279,9685
0,006559	16	282,8170	0,140263	23	216,1512
0,006955	17	291,7957	0,191644	24	122,0159
0,007119	18	298,7450	—	25	4,4970

L'accord avec le résultat obtenu par la méthode de DEFANT est entièrement satisfaisant.

Nouvel essai : $\lambda_1 = 2,22 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, ($\lambda_1 \Delta v^2 = 11.289,60 \times 10^{10} \text{ cm}^3$).

Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ 10^6 m^3	Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ 10^6 m^3
—	0	0	0,003945	13	244,4248
			0,006254	14	258,3722
			0,006370	15	270,7037
0,021455	1	22,1317 (arbitraire)			
0,009350	2	43,7886	0,006708	16	281,3108
0,007566	3	65,0361	0,007113	17	290,0309
0,007276	4	85,7915	0,007281	18	296,6880
0,005893	5	105,9227	0,009843	19	301,1849
			0,018471	20	302,7172
0,004765	6	125,4297			
0,004106	7	144,3390	0,061895	21	298,6580
0,003708	8	162,6556	0,153183	22	276,1134
0,003455	9	180,3691	0,143451	23	211,2729
0,003512	10	197,4594	0,196000	24	116,1251
			—	25	—1,7832
0,003460	11	213,8562			
0,003247	12	229,5131			

De ces deux essais, on tire, par interpolation linéaire, la valeur propre « améliorée » :

$$\lambda_1 = 2,236 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad T_1 = 4.242 \text{ sec} = 70 \text{ min } 42 \text{ sec.}$$

L'écart avec les résultats expérimentaux (valeur moyenne des observations : $T_1 \simeq 73 \text{ min. } 30 \text{ sec.}$) et le résultat théorique trouvé précédemment par la méthode de DEFANT ($T_1 = 4.277 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 17 \text{ sec.}$) est très faible (0,82 % environ dans le dernier cas).

b) Essayons maintenant les mêmes valeurs de λ_1 avec la formule :

$$u_{n+1} \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n+1}} \right) = \left(2 - \frac{10 \lambda \Delta v^2}{12 \sigma_n} \right) u_n - \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n-1}} \right) u_{n-1}. \quad (\text{II.5})$$

Une remarque préliminaire s'impose. Comme $\sigma(v)$ s'annule aux extrémités du lac, l'application de cette dernière formule exige des précautions spéciales à ces endroits.

Dans le calcul de u_2 , la contribution de u_0 (nul lui-même) n'est pas nulle : en effet, le rapport u_0/σ_0 (qui s'exprime en unités 10^{-3} et n'a pas de dimensions physiques), tend vers un. Par suite, on aura :

$$u_2 \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_2} \right) = \left(2 - \frac{10 \lambda \Delta v^2}{12 \sigma_1} \right) u_1 - \left(\frac{\lambda \Delta v^2}{12} \times 10^{-3} \right).$$

De même, pour le calcul de u_{25} (qui doit s'annuler si λ est correctement choisi), on devra prendre $u_{25}/\sigma_{25} = 1 \times 10^{-3}$, même si λ n'est pas correctement choisi, alors que dans ce cas, le rapport en question n'a pas de valeur finie.

On écrira donc :

$$u_{25} = \left(2 - \frac{10 \lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{24}} \right) u_{24} - \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{23}} \right) u_{23} - \left(\frac{\lambda \Delta v^2}{12} \times 10^{-3} \right).$$

Premier essai :

$$\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}.$$

Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{12 \sigma_n}$	Section n°	$u(v)$ 10^9 m^3	Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{12 \sigma_n}$	Section n°	$u(v)$ 10^6 m^3
—	0	—	0,0003214	13	245,6199
0,0017482	1	22,1317 (arbitraire)	0,0005096	14	259,7023
0,0007619	2	43,8339	0,0005190	15	272,2411
0,0006165	3	65,1233	0,0005466	16	283,0800
0,0005928	4	85,9269	0,0005796	17	292,0610
0,0004802	5	106,1300	0,0005932	18	299,0172
0,0003882	6	125,7238	0,0008020	19	303,7863
0,0003345	7	144,7301	0,0015051	20	305,4819
0,0003021	8	163,1542	0,0050432	21	300,8190
0,0002815	9	180,9861	0,0124816	22	277,0672
0,0002862	10	193,2025	0,0116886	23	214,6766
0,0002819	11	214,7402	0,0159703	24	121,7901
0,0002646	12	230,5548	—	25	6,9349

On voit que les résultats pour $u(v)$ diffèrent très peu de ceux trouvés par la formule plus simple (II.4). Afin de rendre la comparaison plus concluante, reprenons encore le calcul complet avec $\lambda_1 = 2,25 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, et interpolons ensuite linéairement, afin d'améliorer la valeur trouvée pour λ_1 .

Second essai :

$$\lambda_1 = 2,25 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}.$$

Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{12 \sigma_n}$	Section n°	$u(v)$ 10^6 m^3	Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{12 \sigma_n}$	Section n°	$u(v)$ 10^6 m^3
—	0	0	0,0003287	13	244,9086
0,0017879	1	22,1317 (arbitraire)	0,0005212	14	258,8509
0,0007792	2	43,8242	0,0005308	15	271,2196
0,0006305	3	65,0946	0,0005590	16	281,8562
0,0006063	4	85,8694	0,0005927	17	290,6010
0,0004910	5	106,0305	0,0006067	18	297,2854
0,0003791	6	125,5713	0,0008202	19	301,7465
0,0003422	7	144,5345	0,0015392	20	303,0858
0,0003090	8	162,9052	0,0051579	21	297,9756
0,0002879	9	180,6710	0,0127652	22	273,5378
0,0002918	10	197,8086	0,0119542	23	210,1335
0,0002883	11	214,2552	0,0163333	24	116,2193
0,0002706	12	229,9642	—	25	0,8013

En extrapolant linéairement, on obtient la valeur « améliorée » pour λ_1 : $\lambda_1 = 2,257 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ ou $T_1 \simeq 4.223 \text{ sec.} = 70 \text{ min. } 23 \text{ sec.}$

L'écart avec la période trouvée par la méthode d'existence de A. DEFANT ($T_1 = 4.277 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 17 \text{ sec.}$) n'est que de 1,26 % environ.

Remarque. — Il ne faut pas s'étonner de ce que la formule (II.5), plus raffinée que la formule (II.4), conduite à un résultat qui s'écarte davantage du résultat expérimental ($T_1 = 4.410 \text{ sec.}$ environ, soit 73 min. 30 sec.) que celui trouvé par la formule (II.4).

En effet, le lac étudié ici diffère légèrement du lac de Genève, puisque toutes les valeurs adoptées pour $\sigma(v)$ sont interpolées, ce qui peut donner lieu (étant donné le caractère assez rudimentaire de l'interpolation) à des écarts sensibles avec les valeurs « exactes ». Mais on a déjà souligné que la présente comparaison sert avant tout à montrer comment deux formules de résolution de l'équation (I.10) par différences finies, l'une assez grossière, l'autre plus raffinée, conduisent à des périodes propres qui diffèrent de moins de 0,5 % entre elles. Ceci paraît une justification expérimentale satisfaisante de l'emploi de la première formule, qui a été fait systématiquement dans la seconde partie de ce livre.

Voici, pour terminer, un calcul de la dénivellation :

$$\zeta = - \frac{\Delta u}{\Delta v}$$

A partir des résultats trouvés par la formule (II. 4)		Section n°	A partir des résultats trouvés par la formule (II. 5)	
($\lambda_1 = 2,20$ $\times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$)	($\lambda_1 = 2,25$ $\times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$)		($\lambda_1 = 2,20$ $\times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$)	($\lambda_1 = 2,25$ $\times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$)
ζ cm	ζ cm		ζ cm	ζ cm
98,802	98,802	1	98,802	98,802
96,729	96,683	2	96,885	96,842
94,942	94,855	3	95,042	94,957
92,792	92,658	4	92,873	92,745
90,066	89,871	5	90,492	90,005
87,339	87,085	6	87,472	87,236
84,727	84,417	7	84,850	84,657
82,136	81,771	8	82,250	82,012
79,499	79,078	9	79,608	79,312
76,772	76,296	10	76,859	76,507
73,737	73,200	11	73,829	73,422
70,498	69,897	12	70,601	70,129
67,234	66,570	13	67,255	66,716
63,001	62,265	14	62,868	62,242
55,927	55,051	15	55,977	55,267
48,365	47,353	16	48,388	47,485
40,083	38,929	17	40,094	39,039
31,024	29,719	18	31,054	29,841
21,529	20,075	19	21,291	19,916
8,487	6,841	20	7,570	5,979
- 16,143	- 18,121	21	- 20,817	- 22,813
- 97,696	-100,646	22	-106,035	-109,097
-284,899	-289,467	23	-278,529	-283,055
-420,247	-424,767	24	-414,672	-419,260
-524,638	-526,376	25	-512,746	-515,259

Comme on peut le voir, les valeurs de ζ obtenues par les deux formules de différences finies et pour une même valeur d'essai de λ_1 diffèrent très peu entre elles; le profil de la seiche conserve, d'une formule à l'autre, une allure identique. Ceci rejoint les conclusions de la page 107 et montre que la formule (II.4), malgré son caractère assez rudimentaire, est certainement suffisante pour les calculs effectués ici et dans la seconde partie de cet ouvrage.

CHAPITRE IV.

LES SEICHES LONGITUDINALES GLOBALES
DU LAC TANGANIKA.

Le lac Tanganika s'étend approximativement du 3° au 9° parallèle sud et du 29° au 31° méridien est. Sa longueur totale dépasse ainsi 650 km, sur une cinquantaine de km de largeur moyenne, et l'extrémité sud du lac se trouve 240 km plus à l'est que son extrémité nord.

L'altitude du lac est de 775 m; c'est le niveau moyen du lac au-dessus du niveau de la mer : on sait que ce niveau moyen a subi au cours des temps d'importantes fluctuations, entraînant des modifications considérables des rives du lac. Pour tout ce qui concerne ces fluctuations, nous renvoyons aux ouvrages de A. CARSON, E. DEVROEY, F. G. S. GILLMAN, M. G. HEINRICH, R. SIEGER et L. STAPPERS⁽⁸³⁾. Sa profondeur maxima atteint 1.470 m (à quelques km de la côte ouest, à hauteur des monts Marungu), et sa profondeur moyenne est d'environ 800 m.

Malgré l'étendue énorme de cette masse d'eau (plus de 32.00 km² de superficie totale), on peut envisager la possibilité de seiches affectant la masse entière du lac, bien que les conditions de pression atmosphérique nécessaires à l'excitation directe de seiches globales ne puissent probablement être réalisées qu'exceptionnellement; aussi faudra-t-il, à première vue, plutôt s'attendre à observer des seiches longitudinales partielles. Néanmoins, il reste indispensable de rechercher par les calculs quelques-uns des modes d'oscillation propres globaux du lac : on a vu (pp. 76 sqq.) que pour déterminer si un lac composé apparemment de plusieurs bassins se comporte réellement comme tel, il faut examiner sa courbe d'impédance $\bar{E}(v) = \zeta/u$ au voisinage des détroits et étranglements. Or, la construction de cette courbe exige précisément le calcul des modes normaux globaux; ce sera donc là l'objet du présent chapitre.

⁽⁸³⁾ CARSON, A., *The Rise and Fall of Lake Tanganyika*, Quart. Journ. Geolog. Soc., 48 (1892), p. 401; DEVROEY, E., *Le problème de la Lukuga*, Inst. Roy. Col. Belge Bruxelles, 1938, pp. 123-127; ID., *A propos de la stabilisation du niveau du lac Tanganika*, Bruxelles, Falk, 1949; GILLMAN, F. G. S., *Hydrology of Lake Tanganyika*, Geolog. Survey Dept., Dahr-es-Salam, 1931; HEINRICH, M. G., *Les fluctuations de niveau du lac Tanganika*, Bull. Séances I.R.C.B., 7 (1936), pp. 366-385; SIEGER, R., *The Rise and Fall of Lake Tanganyika*, Quart. Journ. Geolog. Soc., 49 (1893), p. 579; STAPPERS, L., *Sondages dans le lac Tanganika*, Rev. Cong., 1913, pp. 116-118; ID., *Recherches bathymétriques sur les lacs Moero et Tanganika*, Ann. Biologie Lacustre, 1914, pp. 83-114.

§ 1. DONNÉES BATHYMÉTRIQUES ET GÉOGRAPHIQUES.

Les données relatives au lac Tanganika ont été recueillies au cours de l'exploration hydrobiologique du lac effectuée en 1946-1947 par un groupe de savants belges ⁽⁸⁴⁾. La carte utilisée pour les calculs a été publiée par M. A. CAPART ⁽⁸⁵⁾.

Elle comprend deux cartes complètes du lac, à l'échelle 1/500.000^e, dont l'une donne les principales lignes isobathes (50, 100, 250, 500, 750, 1.000, 1.250 et 1.400 m) et l'autre les tracés et cotes des échosondages — ces deux cartes se complétant du reste l'une l'autre — et deux cartes partielles, représentant seulement l'extrémité nord du lac, à l'échelle de 1/200.000^e, la première donnant à nouveau les isobathes, et la seconde les tracés et cotes des échosondages.

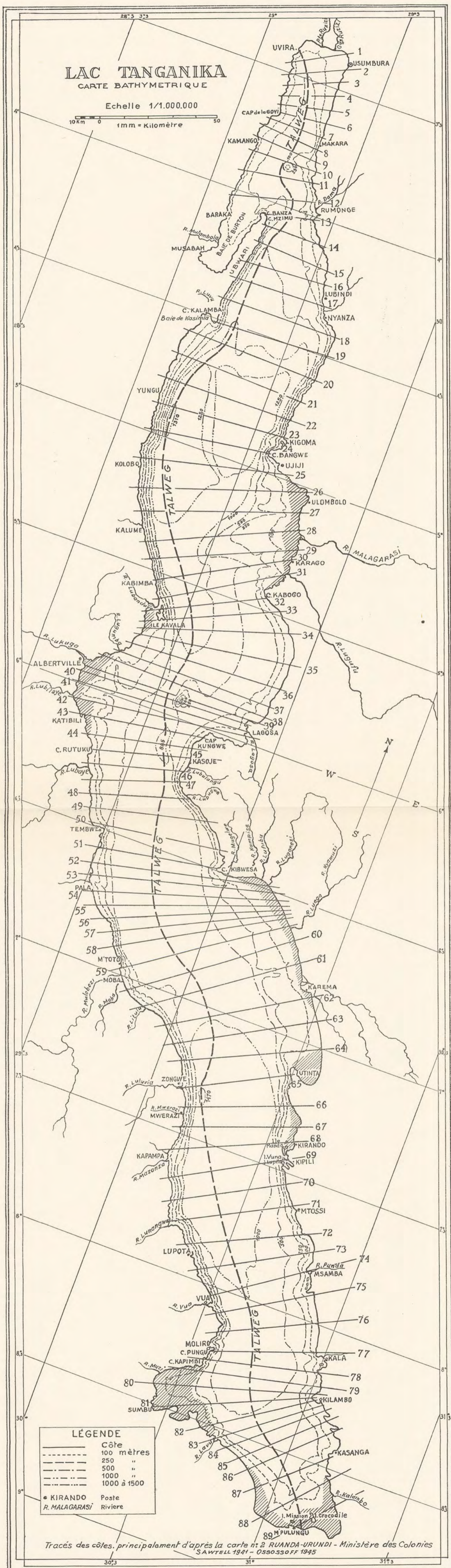
Tout comme pour le lac de Genève (cf. chapitre III), on a procédé ici à une légère « rectification » du contour du lac (4 % environ de la surface totale du lac ont ainsi été « rognés »). Quant à la baie de Burton, elle a été entièrement négligée ici, tant à cause de ses très faibles profondeurs et étendue relatives, qu'à cause de sa situation géographique particulière (cf. pl. II ; les zones « rognées » sont hachurées).

Le lac a ensuite été divisé, dans le sens de la longueur, en 89 compartiments, numérotés de 1 à 89 en commençant par l'extrémité nord et en terminant par l'extrémité sud. Les résultats des mesures effectuées sur la carte se trouvent consignés dans la table suivante; les notations sont les mêmes que celles utilisées pour le lac de Genève (cf. p. 91).

Section n°	Δx km	x km	$S(x)$ km ²	$b(x)$ km	$\sigma(v)$ 10 ¹⁰ m ³	$\beta(x)$ km	$\tau(v)$ 10 ¹⁰ m ³	Δv km ²	$v(x)$ km ²
1	5,5	5,5	2,35	24	5,64	20,73	4,87	114	114
2	5	10,5	3,24	25	8,10	25,60	8,29	128	242
3	5	15,5	3,31	23	7,62	23,80	7,88	119	361
4	5	20,5	3,42	23	7,87	23,80	8,14	119	480
5	5	25,5	3,68	21,5	7,91	21,40	7,88	107	587
6	5	30,5	4,25	21	8,92	21,20	9,01	106	693
7	5	35,5	4,95	24	11,87	22,40	11,09	112	805
8	5	40,5	5,45	26	14,18	24,60	13,41	123	928
9	5	45,5	5,21	28,5	14,86	25,40	13,23	127	1.055
10	5	50,5	5,68	27,5	15,61	28,00	15,90	140	1.195
11	10	60,5	7,23	31,5	22,77	22,50	16,27	225	1.420
12	11	71,5	8,17	36,5	29,81	30,73	25,11	338	1.758
13	5	76,5	4,82	22	10,61	27,40	13,21	137	1.895
14	8	84,5	5,66	27	15,27	23,50	13,30	188	2.083
15	9,5	94	8,84	31,5	27,84	26,10	23,07	248	2.331
16	9,5	103,5	13,25	35	46,37	25,05	33,19	238	2.569
17	9	112,5	21,01	39	81,95	34,00	71,43	306	2.875
18	9,5	122	23,73	50	118,6	47,37	112,41	450	3.325
19	10	132	43,13	49	211,3	51,90	223,84	519	3.844
20	10	142	54,51	57,5	313,4	64,50	351,59	645	4.489

⁽⁸⁴⁾ Cf. LELOUP, E., *Exploration hydrobiologique du lac Tanganika*, vol. II, fasc. 1, Bruxelles, Institut royal des Sciences naturelles de Belgique, 1949.

⁽⁸⁵⁾ CAPART, A., *ibid.*, vol. II, fasc. 2.



ERRATUM. — Au lieu de : Échelle 1/1.000.000, lire : Échelle 1/1.250.000.
(0,8 mm = 1 kilomètre.)

Section	Δx	x	$S(x)$	$b(x)$	$\sigma(v)$	$\beta(x)$	$\tau(v)$	Δv	$v(x)$
n°	km	km	km ²	km	10 ¹⁰ m ³	km	10 ¹⁰ m ³	km ²	km ²
21	13	155	61,67	55	339,2	43,23	266,60	562	5.051
22	10	165	64,9	55	357,2	57,70	374,47	577	5.628
23	11,5	176,5	65,1	55,5	361,5	42,00	273,42	483	6.111
24	11,5	188	60,3	51	307,8	41,13	248,01	473	6.584
25	12,5	200,5	62,9	61	383,6	47,44	298,40	593	7.177
26	11,5	212	59,5	65	386,7	50,26	299,05	578	7.755
27	10	222	53,4	64,5	344,4	57,10	304,91	571	8.326
28	9,5	231,5	38,5	63	242,5	55,58	213,98	528	8.854
29	10	241,5	30,0	57	171,0	50,90	152,70	509	9.363
30	9,5	251	37,2	55,5	206,5	50,95	189,53	484	9.847
31	10	261	31,6	51	161,2	47,40	149,78	474	10.321
32	4	265	30,6	45	137,7	60,00	183,60	240	10.561
33	4,5	269,5	28,7	50	143,5	52,89	151,79	238	10.799
34	4,5	274	33,9	59,5	201,7	64,00	216,96	288	11.087
35	4	278	34,0	65	221,0	75,50	256,70	302	11.389
36	7,5	285,5	31,1	66,5	206,8	74,93	233,03	562	11.951
37	7,5	293	26,6	69,5	184,9	78,67	209,26	590	12.541
38	5	298	23,9	70	167,3	70,40	168,26	352	12.893
39	5	303	19,9	71	141,3	69,60	138,50	348	13.241
40	1,5	304,5	18,2	67,5	122,8	69,33	126,18	104	13.345
41	3,5	308	24,7	69	170,4	63,14	155,96	221	13.566
42	5	313	22,5	71,5	160,9	69,00	155,25	345	13.911
43	5	318	22,7	50	113,5	58,80	133,48	294	14.205
44	5	323	22,9	45	103,0	54,00	123,60	270	14.475
45	5,5	328,5	21,2	43,5	92,3	44,00	93,28	242	14.717
46	5	333,5	20,5	42	86,1	47,00	96,35	235	14.952
47	5	338,5	20,4	39	79,6	42,20	86,09	211	15.163
48	7	345,5	20,9	41	85,8	37,14	77,62	260	15.423
49	7	352,5	27,1	48	130,2	44,71	121,16	313	15.736
50	10	362,5	29,4	54	158,8	48,00	141,12	480	16.216
51	9,5	372	31,0	51	158,0	49,58	153,70	471	16.687
52	5	377	32,9	65	213,8	53,80	177,00	269	16.956
53	5	382	34,3	73	250,4	64,40	220,89	322	17.278
54	5	387	34,8	76	264,5	68,00	236,64	340	17.618
55	5,5	392,5	36,1	76,5	276,2	66,55	240,25	366	17.984
56	5	397,5	34,8	73	254,0	61,80	215,06	309	18.293
57	5,5	403	35,0	72	252,0	52,36	183,26	288	18.581
58	5	408	33,5	71,5	239,5	51,40	172,19	257	18.838
59	9,5	417,5	30,8	72,5	223,3	57,58	177,35	547	19.385
60	9,5	427	33,3	72	239,8	68,42	227,84	650	20.035
61	9,5	436,5	28,9	67	193,6	65,58	189,53	623	20.658
62	9	445,5	33,3	62	206,5	66,44	221,25	598	21.256
63	10	455,5	43,6	61	266,0	58,60	255,50	586	21.842
64	10	465,5	48,1	59	233,8	59,80	287,64	598	22.440
65	10	475,5	51,4	47	241,6	51,50	264,71	515	22.955
66	10	485,5	53,5	44	235,4	45,90	245,56	459	23.414

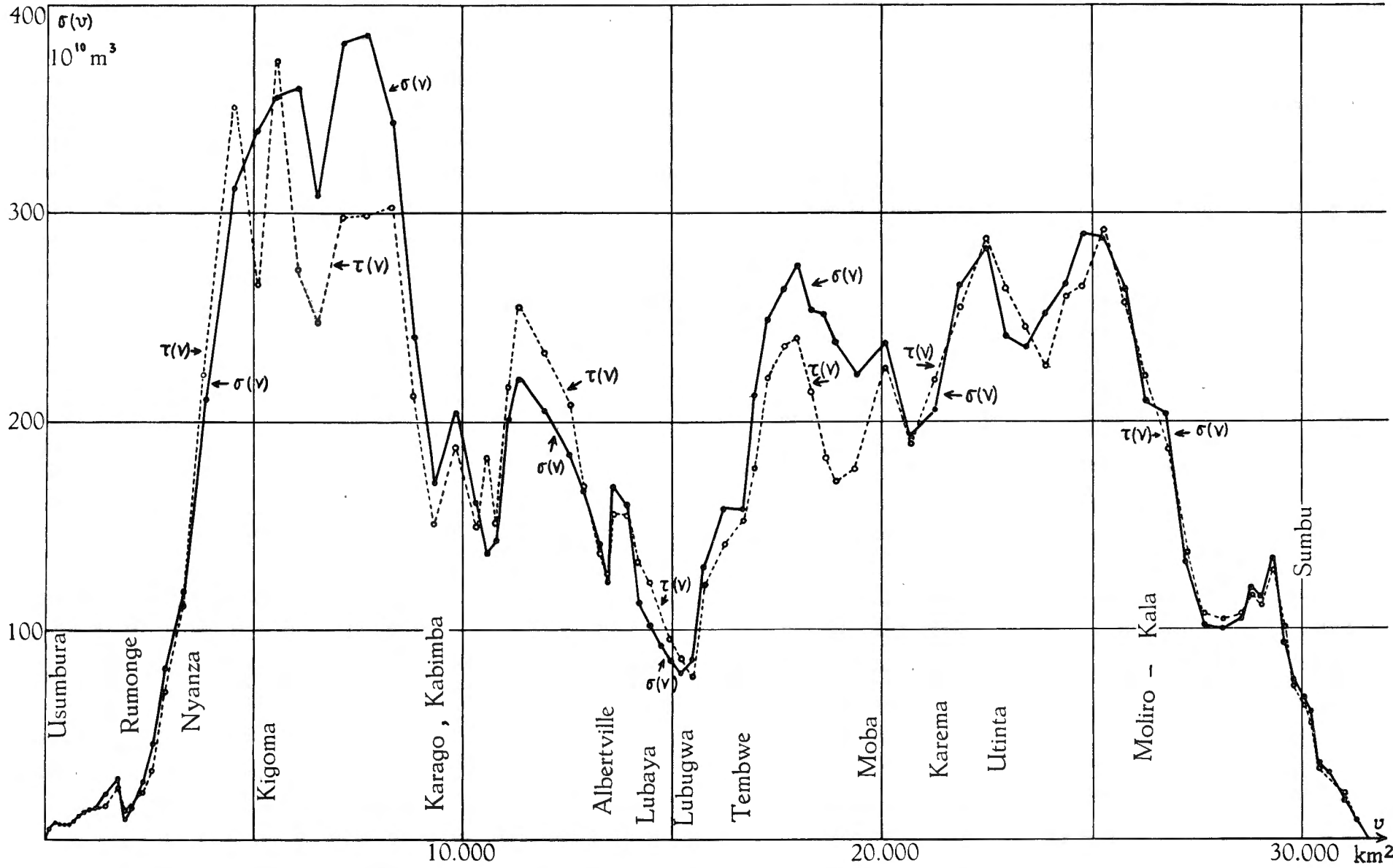


FIG. 14. — Lac Tanganyika. Courbe normale (contour « rectifié »).

Section n°	Δx km	x km	$S(x)$ km ²	$b(x)$ km	$\sigma(v)$ 10 ¹⁰ m ³	$\beta(x)$ km	$\tau(v)$ 10 ¹⁰ m ³	Δv km ²	$v(x)$ km ²
67	10	495,5	51,2	49	250,9	44,10	225,79	441	23.855
68	10	505,5	55,5	48	266,4	46,90	260,29	469	24.324
69	10	515,5	58,0	50	290,0	45,70	265,06	457	24.781
70	9,5	525	57,6	50	288,0	50,74	292,26	482	25.263
71	10	535	49,4	53,5	264,3	52,00	256,88	520	25.783
72	9,5	544,5	42,0	50	210,0	52,84	221,93	502	26.285
73	10	554,5	40,0	51	204,0	46,60	186,40	466	26.751
74	10	564,5	30,4	43,5	132,2	44,60	135,58	446	27.197
75	10	574,5	24,6	41,5	102,1	43,60	107,26	436	27.633
76	10	584,5	23,0	43,5	100,0	45,40	104,42	454	28.087
77	10	594,5	23,6	44,5	105,0	44,90	105,96	449	28.536
78	5	599,5	24,8	48,5	120,3	47,20	117,06	236	28.772
79	5	604,5	22,4	51,5	115,4	49,40	110,66	247	29.019
80	5,5	610	25,4	53	134,6	50,36	127,91	277	29.296
81	5	615	19,9	47	93,5	50,20	99,90	251	29.547
82	5	620	17,3	44	76,1	42,00	72,66	210	29.757
83	5	625	14,7	45,5	66,9	43,20	63,50	216	29.973
84	5	630	13,2	46	60,7	42,00	55,44	210	30.183
85	5	635	8,90	40,5	36,04	38,60	34,35	193	30.376
86	5	640	8,24	39,5	32,55	39,60	32,63	198	30.574
87	10	650	5,60	33,5	18,76	37,20	20,83	372	30.946
88	10	660	2,97	29,5	8,76	31,50	9,36	315	31.261
89	7,5	667,5	0	0	0	22,00	0	165	31.426

Le graphique ci-contre (fig. 14) représente la « courbe normale » du lac (cf. p. 24).

§ 2. CALCUL DES SEICHES PAR LA MÉTHODE D'EXISTENCE DE A. DEFANT.

a) Mode fondamental (seiche uninodale). — Les derniers essais ont été effectués avec des valeurs propres λ_1 égales à $1,71279 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$ et $1,71467 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, auxquelles correspondent des périodes T_1 égales à 15.351 sec. = 4 h. 15 min. 51 sec. et 15.343 sec. = 4 h. 15 min. 43 sec. (à la latitude du Tanganika, $g=978 \text{ cm sec.}^{-2}$; la correction d'altitude, inférieure à 0,015 %, est entièrement négligeable).

Les « résidus » respectifs u_{89} , sont de $9,7841 \times 10^7 \text{ m}^3$ et de $-3,5775 \times 10^7 \text{ m}^3$.

Une interpolation linéaire (les graphiques de la page 126 montreront la légitimité de ce procédé) sur ces « résidus » permet alors d'arriver à une valeur « améliorée » de λ_1 , à savoir $1,71417 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, à laquelle correspond la période « améliorée » $T_1=15.346 \text{ sec.}=4 \text{ h. } 15 \text{ min. } 46 \text{ sec.}$ C'est cette dernière valeur qui sera considérée comme définitive.

Voici les calculs relatifs au dernier essai :

$$\lambda_1 = 1,71467 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}.$$

Section n°	ζ cm	u 10^7 m^3	ξ 10^8 cm	$\Delta\zeta$ cm
1	1.000,0000	114,0000	48,510	- 4,5748
2	995,4252	241,4144	74,511	- 6,3881
3	989,0371	359,1098	108,492	- 9,3014
4	979,7357	475,6983	139,093	-11,9249
5	967,8108	579,2541	157,406	-13,4950
6	954,3158	680,4116	169,097	-13,7257
7	940,5901	785,7577	158,739	-13,6092
8	926,9809	899,7763	165,097	-14,1543
9	912,8266	1.015,7053	194,953	-16,7140
10	896,1126	1.141,1611	200,909	-17,2246
11	878,8880	1.338,9109	185,188	-31,7536
12	847,1344	1.625,2423	198,928	-37,5205
13	809,6139	1.736,1594	360,199	-30,8811
14	778,7328	1.882,5612	332,608	-45,6250
15	733,1078	2.064,3719	233,526	-38,0399
16	695,0679	2.229,7981	168,287	-27,4129
17	667,6550	2.434,1005	115,854	-17,8786
18	649,7764	2.726,4999	114,897	-18,7160
19	631,0604	3.054,0202	70,810	-12,1416
20	618,9188	3.453,2228	63,350	-10,8624
21	608,0564	3.794,0505	61,536	-13,7168
22	594,3396	4.137,8844	63,758	-10,9324
23	583,4072	4.419,6701	67,890	-13,3870
24	570,0202	4.689,2897	77,766	-15,3344
25	554,6858	5.018,2184	79,781	-17,0998
26	537,5860	5.328,9431	89,562	-17,6605
27	519,9255	5.625,8206	105,352	-18,0644
28	501,8611	5.890,8033	153,008	-24,9242
29	476,9369	6.133,5642	204,452	-35,0568
30	441,8801	6.347,4342	170,630	-27,7945
31	414,0856	6.543,7108	207,079	-35,5072
32	378,5784	6.634,5696	216,816	-14,8707
33	363,7077	6.721,1320	234,186	-18,0698
34	345,6379	6.820,6757	201,200	-15,5246
35	330,1133	6.920,3699	203,540	-13,9602
36	316,1531	7.098,0479	228,233	-29,3508
37	286,8023	7.267,2613	273,205	-35,1342
38	251,6681	7.355,8485	307,776	-26,3867
39	225,2814	7.434,2464	373,580	-32,0283
40	193,2531	7.454,3447	409,579	-10,5344
41	182,7187	7.494,7255	303,430	-18,2099
42	164,5088	7.551,4810	335,621	-28,7740
43	135,7348	7.591,3870	334,422	-28,6712

Section n°	ζ cm	u 10^7 m^3	ξ 10^3 cm	$\Delta\zeta$ cm
44	107,0636	7.620,2942	332,764	-28,5290
45	78,5346	7.639,2996	360,344	-33,9829
46	44,5517	7.649,7692	373,159	-31,9922
47	12,5595	7.652,4192	375,119	-32,1603
	Nœud			
48	-19,6008	7.647,3230	365,901	-43,9180
49	-63,5188	7.627,4416	281,455	-33,7822
50	-97,3010	7.580,7371	257,848	-44,2124
51	-141,5134	7.514,0843	242,390	-39,4838
52	-180,9972	7.465,3961	226,912	-19,4540
53	-200,4512	7.400,8508	215,768	-18,4985
54	-218,9497	7.326,4079	210,529	-18,0494
55	-236,9991	7.239,6662	200,545	-18,9128
56	-255,9119	7.160,5894	205,764	-17,6409
57	-273,5528	7.081,8062	202,337	-19,0818
58	-292,6346	7.006,5991	209,152	-17,9313
59	-310,5659	6.836,7196	221,971	-36,1577
60	-346,7236	6.611,3493	198,539	-32,3407
61	-379,0643	6.375,1922	220,595	-35,9335
62	-414,9978	6.127,0235	183,995	-28,3942
63	-443,3920	5.867,1958	134,569	-23,0741
64	-466,4661	5.588,2491	116,180	-19,9210
65	-486,3871	5.337,7597	103,847	-17,8063
66	-504,1934	5.106,3349	95,446	-16,3658
67	-520,5592	4.876,7683	95,249	-16,3321
68	-536,8913	4.624,9663	83,333	-14,2889
69	-551,1802	4.373,0769	75,398	-12,9283
70	-564,1085	4.101,1766	71,201	-11,5982
71	-575,7067	3.801,8091	76,960	-13,1961
72	-588,9028	3.506,1799	83,480	-13,5984
73	-602,5012	3.225,4143	80,635	-13,8262
74	-616,3274	2.950,5323	97,057	-16,6421
75	-632,9695	2.674,5576	108,722	-18,6422
76	-651,6117	2.378,7259	103,423	-17,7336
77	-669,3453	2.078,1899	88,059	-15,0992
78	-684,4445	1.916,6610	77,285	-6,6259
79	-691,0704	1.745,9666	77,945	-6,6825
80	-697,7529	1.552,6891	61,129	-5,7649
81	-703,5178	1.376,1061	69,151	-5,9286
82	-709,4464	1.227,1224	70,932	-6,0812
83	-715,5276	1.072,5684	72,964	-6,2555
84	-721,7831	920,9939	69,772	-5,9818
85	-727,7649	780,5353	87,701	-7,5189
86	-735,2838	634,9491	77,057	-6,6064
87	-741,8902	358,9659	64,101	-10,9912
88	-752,8814	121,8083	41,013	-7,0324
89	-759,9138	-3,5775	—	—

Le nœud se trouve sur une ligne passant un peu au nord de l'embouchure de la Lubugwe (côte est) et une dizaine de km au sud de l'embouchure de la Lubaya (côte ouest) : cette ligne nodale partage la surface totale du lac en deux portions très sensiblement égales.

Afin de se rendre compte de la stabilité de la méthode, on a refait les mêmes calculs en n'utilisant que 45 divisions au lieu de 89, à savoir les divisions d'ordre pair seulement; les nouveaux Δx_{2i} sont donc égaux à la somme des anciens $\Delta x_{2i-1} + \Delta x_{2i}$ et il en est de même pour les nouveaux Δv_{2i} ; quant aux grandeurs $S(x)$ et $b(x)$, elles restent inchangées.

Voici le résultat de cet essai ($\lambda_1 = 1,71467 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$) :

Section n°	ζ cm	u 10^7 m^3	ξ 10^8 cm	$\Delta\zeta$ cm
2	1.000,0000	242,0000	74,691	-13,4474
4	986,5527	476,7995	139,415	-23,9051
6	962,6476	681,8434	160,434	-27,5091
8	935,1385	901,6009	165,431	-28,3660
10	906,7725	1.143,7092	201,357	-34,5261
12	872,2464	1.634,7839	200,096	-72,0507
14	800,1957	1.894,8475	334,779	-74,6245
16	725,5712	2.247,4751	169,621	-55,2745
18	670,2967	2.754,2194	116,065	-38,8076
20	631,4892	3.489,2728	64,012	-21,9519
22	609,5373	4.183,5358	64,461	-25,4217
24	584,1156	4.741,9503	78,639	-31,0132
26	553,1024	5.389,6332	90,582	-37,2764
28	515,8260	5.956,5260	154,715	-51,7306
30	464,0954	6.417,3727	172,510	-57,6806
32	406,4148	6.699,4246	218,935	-52,5562
34	353,8586	6.885,5542	203,114	-31,3446
36	322,5140	7.164,2063	230,360	-45,4240
38	277,0900	7.425,2251	310,679	-66,5890
40	210,5010	7.520,3716	413,207	-46,0534
42	164,4476	7.613,4489	338,376	-49,3173
44	115,1303	7.678,3824	335,300	-57,4929
46	57,6374	7.705,8754	375,896	-67,6764
	Nœud	.	.	.
48	-10,0390	7.701,1470	368,476	-75,8178
50	-85,8568	7.633,0626	259,628	-75,6800
52	-161,5368	7.513,5254	228,375	-56,7802
54	-218,3170	7.368,9995	211,753	-36,3087
56	-254,6257	7.197,1272	206,814	-37,2349
58	-291,8606	7.038,0632	210,091	-37,8249
60	-329,6855	6.643,4297	199,502	-64,9952
62	-394,6807	6.161,5246	185,031	-58,6944
64	-453,3751	5.624,7285	116,938	-40,1020

Section n°	ζ cm	u 10^7 m^3	ξ 10^3 cm	$\Delta\zeta$ cm
66	-493,4771	5.144,0818	96,151	-32,9734
68	-526,4505	4.665,0119	84,054	-28,8250
70	-555,2755	4.143,6083	71,938	-24,0532
72	-579,3287	3.551,5344	84,560	-28,2735
74	-607,6022	2.997,4012	98,599	-33,8129
76	-641,4151	2.426,5418	105,502	-36,1802
78	-677,5953	1.962,3890	79,129	-20,3520
80	-697,9473	1.596,6647	62,861	-11,3175
82	-709,2648	1.269,6936	73,393	-12,5845
84	-721,8493	962,1858	72,893	-12,4987
86	-734,3480	675,0557	81,924	-14,0473
88	-748,3953	160,9081	54,178	-18,5795
89	-766,9748	34,3573	—	—

Si l'on compare ces résultats avec ceux obtenus précédemment, on constate que l'écart entre les deux valeurs de ζ au même point varie de manière assez régulière, tout en restant faible (quelques décimètres au maximum, avec les valeurs choisies ici); le nœud est déplacé d'environ 2,6 km vers le sud (par rapport aux résultats précédents). Quant à la période, si l'on considère l'ordre de grandeur du « résidu » u_{89} laissé par les derniers calculs, il faut s'attendre à trouver, au cas où l'on effectuerait de nouveaux essais avec 45 divisions, une période fondamentale de 30 à 40 sec. plus courte que celle obtenue précédemment.

La fonction propre $u(v)$ enfin est également très peu altérée par la simplification introduite dans les calculs.

Bien entendu, pour les modes plus élevés (à deux et à trois nœuds) ces écarts deviendront plus considérables; aussi a-t-on préféré, dans tous les calculs relatifs aux seiches longitudinales du Tanganika, s'en tenir à 89 divisions; les calculs s'en trouvent un peu allongés, mais les résultats sont plus sûrs, et il y a grand avantage, pour la vérification de l'orthogonalité des fonctions propres $u(v)$ correspondant aux trois modes étudiés, à utiliser le même nombre de divisions dans les trois cas.

Néanmoins, le présent essai constitue une belle illustration de la stabilité de la méthode de DEFANT.

b) Deuxième mode (seiche binodale). — Les derniers essais ont été effectués avec des valeurs propres λ_2 égales à $5,86153 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$ et $5,88500 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, auxquelles correspondent des périodes T_2 égales à 8.299 sec. = 2 h. 18 min. 19 sec. et 8.282 sec. = 2 h. 18 min. 2 sec. Les « résidus » u_{89} respectifs sont de $-22,5656 \times 10^7 \text{ m}^3$ et de $1,8896 \times 10^7 \text{ m}^3$. Une interpolation linéaire (cf. p. 113) fournit alors la valeur « améliorée » $\lambda_2 = 5,88319$

$\times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, à laquelle correspond la période $T_2 = 8.283,8 \text{ sec.} = 2 \text{ h. } 18 \text{ min. } 3,8 \text{ sec.}$

C'est cette dernière valeur qui sera à nouveau considérée comme définitive.

Voici les calculs relatifs au dernier essai ($\lambda_2 = 5,88500 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$) :

Section n°	ζ cm	u 10^7 m^3	ξ 10^3 cm	$\Delta\zeta$ cm
1	1.000,0000	114,0000	48,510	-15,7015
2	984,2985	239,9902	74,071	-21,7954
3	962,5031	354,5281	107,108	-31,5165
4	930,9866	465,3155	136,057	-40,0348
5	890,9518	560,6473	152,350	-44,8290
6	846,1228	650,3363	153,020	-45,0261
7	801,0967	740,0591	149,507	-43,9924
8	757,1043	833,1829	152,878	-44,9844
9	712,1199	923,6221	177,279	-52,1643
10	659,9556	1.016,1059	178,876	-52,6343
11	607,3213	1.152,6632	159,428	-93,8234
12	513,4979	1.326,2255	162,329	-105,0837
13	408,4142	1.382,1782	286,759	-84,3788
14	324,0354	1.443,0969	254,964	-120,0371
15	203,9983	1.493,6885	168,969	-94,4663
16	109,5320	1.519,7571	114,699	-64,1253
17	45,4067	1.533,6515	72,996	-38,6623
18	6,7444	1.536,6865	64,757	-36,2040
	Nœud			
19	- 29,4596	1.521,3970	35,275	-20,7593
20	- 50,2189	1.489,0058	27,316	-16,0755
21	- 66,2944	1.451,7483	23,541	-18,0100
22	- 84,3044	1.403,1047	21,619	-12,7228
23	- 97,0272	1.356,2406	20,833	-14,0993
24	-111,1265	1.303,6778	21,620	-14,6319
25	-125,7584	1.229,1031	19,541	-14,3748
26	-140,1332	1.148,1061	19,296	-13,0590
27	-153,1922	1.060,6334	19,862	-11,6888
28	-164,8810	973,5762	25,288	-14,1379
29	-179,0189	882,4556	29,415	-17,3107
30	-196,3296	787,4321	21,168	-11,8345
31	-208,1641	688,7623	21,796	-12,8269
32	-220,9910	635,7245	20,775	- 4,8904
33	-225,8814	581,9647	20,278	- 5,3701
34	-231,2515	515,3643	15,202	- 4,0259
35	-235,2774	444,3105	13,068	- 3,0762
36	-238,3536	310,3558	9,979	- 4,4045
37	-242,7581	167,1285	6,283	- 2,7732

Section n°	ζ cm	u 10^7 m^3	ξ 10^3 cm	$\Delta\zeta$ cm
38	-245,5313	80,7015	3,377	- 0,9937
	Ventre			
39	-246,5250	- 5,0892	- 0,2557	0,0752
40	-246,4498	- 30,7200	- 1,688	0,1490
41	-246,3008	- 85,1525	- 3,447	0,7100
42	-245,5908	-169,8813	- 7,550	2,2216
43	-243,3692	-241,4318	-10,636	3,1296
44	-240,2396	-306,2965	-13,375	3,9356
45	-236,3040	-363,4821	-17,145	5,5494
46	-230,7546	-417,7094	-20,376	5,9956
47	-224,7590	-465,1335	-22,801	6,7092
48	-218,0498	-521,8264	-24,968	10,2856
49	-207,7642	-586,8566	-21,655	8,9208
50	-198,8434	-682,3014	-23,208	13,6579
51	-185,1855	-769,5238	-24,823	13,8779
52	-171,3076	-815,6055	-24,790	7,2945
53	-164,0131	-868,4177	-25,318	7,4498
54	-156,5633	-921,6492	-26,484	7,7929
55	-148,7704	-976,0992	-27,039	8,7518
56	-140,0186	-1.019,3649	-29,292	8,6192
57	-131,3994	-1.057,2079	-30,206	9,7769
58	-121,6225	-1.088,4649	-32,491	9,5605
59	-112,0620	-1.149,7628	-37,330	20,8703
60	- 91,1917	-1.209,0374	-36,307	20,2983
61	- 70,8934	-1.253,2040	-43,363	24,2432
62	- 46,6502	-1.281,1008	-38,471	20,3762
63	- 26,2740	-1.296,4974	-29,736	17,4996
64	- 8,7744	-1.301,7445	-27,063	15,9266
	Nœud			
65	7,1522	-1.298,0611	-25,254	14,8620
66	22,0142	-1.287,9566	-24,074	14,1675
67	36,1817	-1.272,0005	-24,844	14,6207
68	50,8024	-1.248,1742	-22,490	13,2354
69	64,0378	-1.218,9089	-21,016	12,3679
70	76,4057	-1.182,0814	-20,522	11,4733
71	87,8790	-1.136,3843	-23,004	13,5379
73	101,4169	-1.085,4730	-25,845	14,4493
73	115,8662	-1.031,4794	-25,787	15,1756
74	131,0418	-973,0348	-32,008	18,8367
75	149,8785	-907,6878	-36,898	21,7145
76	171,5930	-829,7846	-36,078	21,2319
77	192,8249	-743,2062	-31,492	18,5330
78	211,3579	-693,3257	-27,957	8,2263
79	219,5842	-639,0884	-28,531	8,3952
80	227,9794	-575,9381	-22,675	7,3393
81	235,3187	-516,8731	-25,974	7,6428

Section n°	ζ cm	u 10^7 m^3	ξ 10^3 cm	$\Delta\zeta$ cm
82	242,9615	-465,8512	-26,928	7,9236
83	250,8851	-411,6600	-28,004	8,2402
84	259,1253	-357,2437	-27,064	7,9636
85	267,0889	-305,6955	-34,348	10,1069
86	277,1958	-250,8107	-30,438	8,9564
87	286,1522	-144,3621	-25,779	15,1709
88	301,3231	- 49,4453	-16,648	9,7973
89	311,1204	1,8896	—	—

Le nœud septentrional se trouve à une dizaine de km au sud de Nyanza et coïncide approximativement avec le parallèle passant à cet endroit; le nœud méridional se trouve à 5 km environ au nord de la ligne Zongwe (côte ouest) — Utinta (côte est).

c) Troisième mode (seiche trinodale). — Les derniers essais ont été effectués avec des valeurs propres λ_3 égales à $9,420 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$ et $9,813 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, auxquelles correspondent des périodes T_3 égales à 6.546 sec. = 1 h. 49 min. 06 sec. et 6.414 sec. = 1 h. 46 min. 54 sec.

Les « résidus » respectifs u_{89} sont de $218,9797 \times 10^7 \text{ m}^3$ et de $0,1914 \times 10^7 \text{ m}^3$.

L'interpolation linéaire n'étant guère praticable dans ce cas, on adoptera comme définitif le résultat obtenu par le dernier essai ($\lambda_3 = 9,813 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, $T_3 = 6.414 \text{ sec.} = 1 \text{ h. } 46 \text{ min. } 54 \text{ sec.}$).

Voici les calculs relatifs à ce dernier essai :

Section n°	ζ cm	u 10^7 m^3	ξ 10^3 cm	$\Delta\zeta$ cm
1	1.000,0000	114,0000	48,510	- 26,1816
2	973,8184	238,6488	73,657	- 36,1398
3	937,6786	350,2326	105,810	- 51,9157
4	885,7629	455,6384	133,228	- 65,3683
5	820,3946	543,4206	147,669	- 72,4538
6	747,9408	622,7023	146,518	- 71,8891
7	676,0517	698,4201	141,095	- 69,2283
8	606,8234	773,0594	141,846	- 69,5967
9	537,2267	841,2872	161,475	- 79,2277
10	457,9990	905,4071	159,403	- 78,2111
11	379,7879	990,8594	137,048	-134,4852
12	245,3027	1.073,7717	131,429	-141,8684
13	103,4343	1.087,9422	225,714	-110,7466
	Nœud			
14	- 7,3123	1.086,5675	191,973	-150,7065
15	-158,0188	1.047,3788	118,482	-110,4531

Section n°	ζ cm	u 10^7 m^3	ξ 10^3 cm	$\Delta\zeta$ cm
16	-268,4719	983,4825	74,225	- 69,1951
17	-337,6670	880,1564	41,892	- 36,9978
18	-374,6648	711,5572	29,986	- 27,9540
19	-402,6188	502,5980	11,653	- 11,4351
20	-414,0539	235,5332	4,321	- 4,2402
21	-418,2941	0,4519	0,0073	- 0,0093
	Ventre			
22	-418,3034	-240,9092	- 3,712	3,6426
23	-414,6608	-441,1404	- 6,777	7,6478
24	-407,0130	-633,7075	- 10,509	11,8594
25	-395,1536	-868,0336	- 13,800	16,9274
26	-378,2262	-1.086,6483	- 18,263	20,6097
27	-357,6165	-1.290,8473	- 24,173	23,7210
28	-333,8955	-1.467,1441	- 38,108	35,5256
29	-298,3699	-1.619,0144	- 53,967	52,9578
30	-245,4121	-1.737,7939	- 46,715	43,5494
31	-201,8627	-1.833,4768	- 58,021	56,9360
32	-144,9267	-1.868,2592	- 61,054	23,9649
33	-120,9618	-1.897,0481	- 66,099	29,1883
34	- 91,7735	-1.923,4789	- 56,740	25,0555
35	- 66,7180	-1.943,6277	- 57,166	22,4388
36	- 44,2792	-1.968,5126	- 63,296	46,5843
	Nœud			
37	2,3051	-1.967,1526	- 73,953	54,4276
38	56,7327	-1.947,1827	- 81,472	39,9742
39	96,7069	-1.913,5287	- 96,157	47,1794
40	143,8863	-1.898,5645	-104,317	15,3549
41	159,2412	-1.863,3722	- 75,440	25,9102
42	185,1514	-1.799,4950	- 79,978	39,2412
43	224,3926	-1.733,5236	- 76,367	37,4695
44	261,8621	-1.662,8208	- 72,612	35,6761
45	297,5382	-1.590,8166	- 75,039	40,4997
46	338,0379	-1.511,3777	- 73,726	36,1737
47	374,2116	-1.432,4191	- 70,217	34,4520
48	408,6636	-1.326,1666	- 63,453	43,5865
49	452,2501	-1.184,6123	- 43,713	30,0269
50	482,2770	- 953,1193	- 32,419	31,8128
51	514,0898	-710,9830	- 22,935	21,3808
52	535,4706	-566,9414	- 17,232	8,4549
53	543,9255	-391,7974	- 11,423	5,6047
54	549,5302	-204,9571	- 5,890	2,8899
55	552,4201	- 2,7713	- 0,0768	0,0414
	Ventre			
56	552,4615	167,9393	4,826	- 2,3679
57	550,0936	326,3663	9,325	- 5,0328
58	545,0608	466,4469	13,924	- 6,8318
59	538,2290	760,8582	24,703	- 23,0290
60	515,2000	1.095,7382	32,905	- 30,6752

Section n°	ζ cm	u 10^7 m^3	ξ 10^3 cm	$\Delta\zeta$ cm
61	484,5248	1.397,5971	48,360	- 45,0829
62	439,4419	1.660,3834	49,861	- 44,0357
63	395,4062	1.892,0914	43,397	- 42,5855
64	352,8207	2.103,0782	43,723	- 42,9054
65	309,9153	2.262,6846	44,021	- 43,1978
66	266,7175	2.385,1079	44,581	- 43,7473
67	222,9702	2.483,4378	48,505	- 47,5980
68	175,3722	2.565,6874	46,229	- 45,3645
69	130,0077	2.625,1009	45,260	- 44,4136
70	85,5941	2.666,3573	46,291	- 43,1541
71	42,4400	2.688,4261	54,422	- 53,4043
	Nœud			
72	- 10,9643	2.682,9220	63,879	- 59,5502
73	- 70,5145	2.650,0622	66,252	- 65,0131
74	-135,5276	2.589,6169	85,185	- 83,5920
75	-219,1196	2.494,0808	101,385	- 99,4891
76	-318,6087	2.349,4325	102,149	-100,2388
77	-418,8475	2.161,3700	91,583	- 89,8704
78	-508,7179	2.041,3126	82,311	- 40,3859
79	-549,1038	1.905,6840	85,075	- 41,7420
80	-590,8458	1.742,0197	68,583	- 37,0153
81	-627,8611	1.584,4266	79,619	- 39,0651
82	-666,9262	1.444,3721	83,490	- 40,9644
83	-707,8906	1.291,4677	87,855	- 43,1061
84	-750,9967	1.133,7584	85,891	- 42,1424
85	-793,1391	980,6826	110,189	- 54,0642
86	-847,2033	812,9363	98,657	- 48,4061
87	-895,6094	479,7696	85,673	- 84,0709
88	-979,6803	171,1703	57,633	- 56,5553
89	-1.036,2356	0,1914	—	—

Le nœud septentrional se trouve à une douzaine de km au sud de Rumonge et coïncide approximativement avec le parallèle passant par cet endroit. Le nœud central se trouve à 10 km environ au nord d'Albertville et coïncide également avec le parallèle de l'endroit. Le nœud méridional passe à 8 km environ au sud de la ligne Kala (côte est) — Moliro (côte ouest).

d) Remarques diverses à propos de calcul des trois premiers modes. — Afin de se rendre compte de l'effet de la « rectification » du contour du lac, il était intéressant de faire les calculs avec un lac Tanganika non « rectifié ». Il y a alors lieu de dresser une nouvelle table de données bathymétriques et géographiques, qu'il est inutile de reproduire ici. On trouve les résultats suivants :

1° Mode fondamental (seiche uninodale). $\lambda_1 = 1,638903 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$ (valeur « améliorée », obtenue par interpolation linéaire), d'où $T_1 = 15.694 \text{ sec}$.

= 4 h. 21 min. 34 sec. L'écart sur la valeur propre atteint environ 4,4 %; celui sur la période est de 2,27 %.

Le nœud du lac non « rectifié » passe 4 ou 5 km au sud de celui du lac « rectifié ».

2° Deuxième mode (seiche binodale). $\lambda_2 = 5,6809 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$ (valeur « améliorée », obtenue par interpolation linéaire), d'où $T_2 = 8,429 \text{ sec.} = 2 \text{ h. } 20 \text{ min. } 29 \text{ sec.}$ L'écart sur la valeur propre est voisin de 3,46 %; celui sur la période est de 1,75 % environ.

Le nœud septentrional du lac non « rectifié » se trouve 6 km environ au sud de celui du lac « rectifié »; quand au nœud méridional du lac non « rectifié », il se trouve approximativement 15 km plus au sud que celui du lac « rectifié ».

3° Troisième mode (seiche trinodale). $\lambda_3 = 9,0935 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$ (valeur « améliorée » par interpolation linéaire), d'où $T_3 = 6,663 \text{ sec.} = 1 \text{ h. } 51 \text{ min. } 3 \text{ sec.}$ L'écart sur la valeur propre est de 7,33 % environ et celui sur la période, de 3,88 %.

Le nœud septentrional du lac non « rectifié » se trouve 3 ou 4 km au sud de celui du lac « rectifié »; pour le nœud central, l'écart est de 6 ou 7 km vers le sud et pour le nœud méridional, il atteint 12 ou 13 km, toujours vers le sud.

Durant le mois d'août 1955, nous avons pu contrôler certains de nos calculs au moyen de la machine à calculer électronique appartenant au C.E.C.E. (Comité d'Étude et d'Exploitation des Calculateurs Électroniques, a.s.b.l.; siège social : 31, rue Belliard, Bruxelles) et actuellement à l'essai dans les locaux de la Bell Telephone Mfg C°, à Anvers. Les résultats, obtenus avec seize décimales (en point décimal fixe) ont été des plus satisfaisants : au début des calculs, il y a concordance pour les sept premiers chiffres des tables de u ; pour les tables ζ et de ξ , cette concordance est respectivement de six et cinq chiffres. La précision sur ξ est nécessairement moindre que sur ζ : en effet, $\xi = u/S$, et S est une donnée de bien moindre précision que u . L'« arrondi » pratiqué tout au long des calculs effectués avec machine de bureau a pour effet de réduire progressivement cette concordance de un, puis finalement de deux chiffres. La correction qui résulterait de ce léger désaccord est entièrement négligeable.

Il reste à examiner maintenant la question de la validité des interpolations linéaires, effectuées pour améliorer les valeurs propres obtenues par des essais successifs à l'aide de la méthode de DEFANT.

Voici d'abord les tableaux des résultats obtenus par ces essais :

1° Mode fondamental.

Essai n°	λ_1 10^{-10}cm^{-1}	$\Delta\lambda_1$ $=1,71417 \times 10^{-10}\text{cm}^{-1} - \lambda_1$	u_{89} 10^7 m^3	$\left(\frac{du}{dv}\right)_0$ 10^2 cm	$\Delta\left(\frac{du}{dv}\right)_0$ $= 0,9975810 \times 10^2 \text{ cm} - \left(\frac{du}{dv}\right)_0$
1	1,63995	0,07422	532,4758	0,9976855	-0,0001045
2	1,68027	0,03390	237,7803	0,9976289	-0,0000479
3	1,71807	-0,00390	- 17,7325	0,9975756	0,0000054
4	1,71545	-0,00128	- 8,9276	0,9975793	0,0000017
5	1,71279	0,00138	9,7841	0,9975831	-0,0000021
6	1,71467	-0,00050	- 3,5775	0,9975802	0,0000008
*7	*1,71417	0	0?	0,9975810	0

2° Deuxième mode.

Essai n°	λ_2 10^{-10}cm^{-1}	$\Delta\lambda_2$ $=5,88319 \times 10^{-10}\text{cm}^{-1} - \lambda_2$	u_{89} 10^7 m^3	$\left(\frac{du}{dv}\right)_0$ 10^2 cm	$\Delta\left(\frac{du}{dv}\right)_0$ $= 0,9916996 \times 10^2 \text{ cm} - \left(\frac{du}{dv}\right)_0$
1	5,68570	0,19749	-216,8807	0,9919760	-0,0002764
2	5,94180	-0,05861	59,5261	0,9916149	0,0000847
3	5,86153	0,02166	- 22,5656	0,9917281	-0,0000285
4	5,88500	-0,00181	1,8896	0,9916950	0,0000046
*5	*5,88319	0	0	0,9916996	0

3° Troisième mode.

Essai n°	λ_3 10^{-10}cm^{-1}	$\Delta\lambda_3$ $=9,813 \times 10^{-10}\text{cm}^{-1} - \lambda_3$	u_{89} 10^7 m^3	$\left(\frac{du}{dv}\right)_0$ 10^2 cm	$\Delta\left(\frac{du}{dv}\right)_0$ $= 0,9861521 \times 10^2 \text{ cm} - \left(\frac{du}{dv}\right)_0$
1	9,110	0,703	379,4011	0,9871446	-0,0009925
2	9,843	-0,030	-16,6580	0,9871095	0,0000426
3	9,420	0,393	218,9797	0,9867066	0,0005545
4	9,813	0	0,1914	0,9861521	0

Les valeurs de λ marquées d'un astérisque sont celles obtenues par interpolation linéaire sur u_{89} et n'ont plus fait l'objet d'un nouvel essai. La validité du procédé est illustrée par les graphiques page 126. Ces graphiques ont été construits comme suit :

On a porté en abscisse $\log_{10} (\Delta\lambda + C^{te})$ et en ordonnée $\log_{10} (u_{89} + C^{te})$ (courbes en trait interrompu) ou $\log_{10} [\Delta(du/dv)_0 + C^{te}]$ (courbes en pointillé).

L'addition de constantes à $\Delta\lambda$, u_{89} et $\Delta(du/dv)_0$ équivaut à une translation des axes pour les deux systèmes de courbes; ces constantes ont été choisies de manière à ce que toutes les quantités d'une même colonne aient le même signe, chose indispensable quand on utilise une échelle logarithmique. Pour le calcul des log, on a encore multiplié les données ainsi modifiées par 10^{15} cm (colonnes des $\Delta\lambda + C^{(6)}$), par 10^{-7} m⁻³ (colonnes des $u_{89} + C^{(6)}$) ⁽⁸⁶⁾ et par -10^5 cm⁻¹ (colonnes des $\Delta(du/dv)_0 + C^{(6)}$). Les $\Delta\lambda$, u_{89} et $\Delta(du/dv)_0$ ainsi modifiés sont marqués d'un astérisque dans les tables ci-dessous.

Quant à l'usage de l'échelle logarithmique elle-même, il s'imposait de toute évidence, étant donné les écarts entre les valeurs à porter en abscisse et en ordonnée sur les graphiques.

Les trois constantes ont pour valeurs respectives :

1° Pour le mode fondamental : $0,00600 \times 10^{-10}$ cm⁻¹; 50×10^7 m³; $-0,0000100 \times 10^2$ cm.

2° Pour le second mode : $0,00700 \times 10^{-10}$ cm⁻¹; -100×10^7 m³; $-0,0002000 \times 10^2$ cm.

3° Pour le troisième mode : $0,05000 \times 10^{-10}$ cm⁻¹; 50×10^7 m³; $0,00010000 \times 10^2$ cm.

On obtient ainsi les trois tableaux suivants, à l'aide desquels on a construit les graphiques; toutes les grandeurs y sont des nombres purs. Il est à remarquer que dans la colonne des u_{89} on n'a retenu que quatre chiffres significatifs, au lieu des six ou sept chiffres utilisés dans les essais par la méthode de DEFANT.

1° Mode fondamental.

Essai n°	$\Delta\lambda_1^*$	$\log_{10}\Delta\lambda_1^*$	u_{89}^*	$\log_{10}u_{89}^*$	$\Delta\left(\frac{du}{dv}\right)_0^*$	$\log_{10}\Delta\left(\frac{du}{dv}\right)_0^*$
1	8.022	3,904	582,50	2,765	1.145	3,059
2	3.990	3,601	287,80	2,459	579	2,763
3	210	2,322	32,27	1,509	46	1,663
4	472	2,674	41,07	1,614	83	1,919
5	738	2,868	59,78	1,777	121	2,083
6	550	2,740	46,42	1,667	92	1,964
7	600	2,778	50,00	1,699	100	2,000

⁽⁸⁶⁾ Pour le deuxième mode, ce facteur est pris égal à -10^{-7} m⁻³ afin de rendre positives toutes les grandeurs de cette colonne.

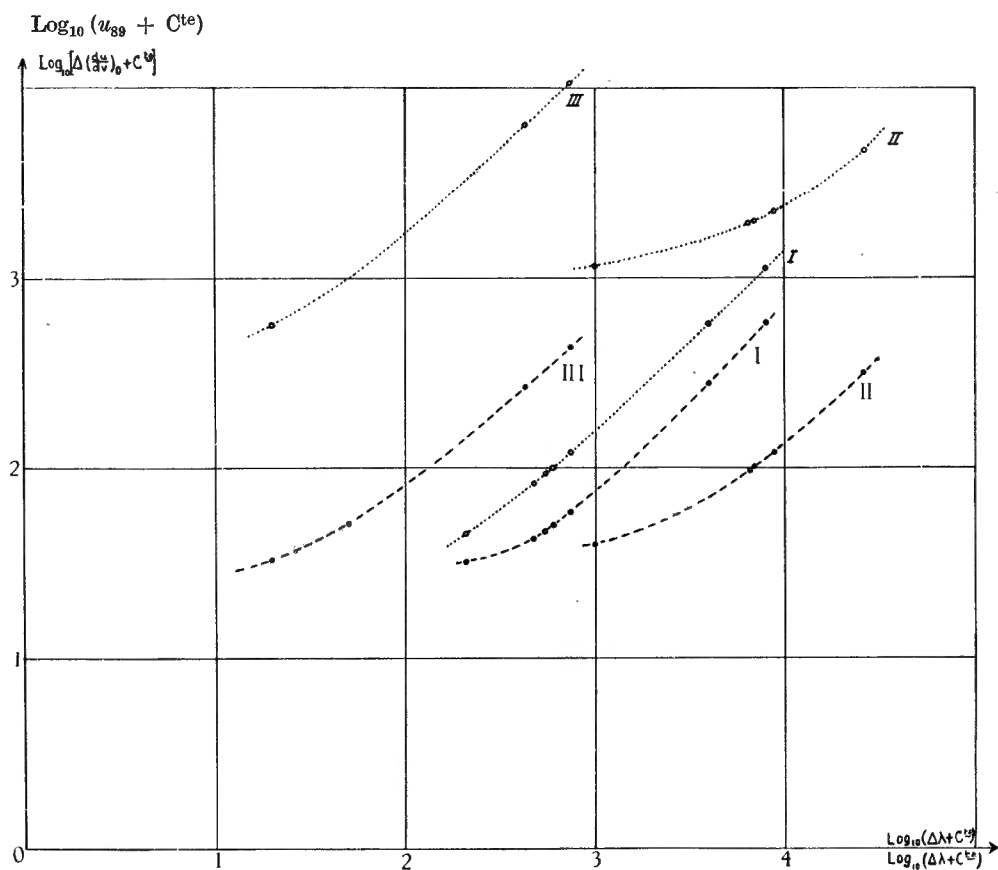


FIG. 15. — Lac Tanganika. Modes d'oscillation longitudinaux (méthode de DEFANT).

Courbes montrant la validité et l'interpolation linéaire pour améliorer la valeur de λ :

- 1) à partir du « résidu » u_{89} (courbes en trait interrompu);
 - 2) à partir de l'inclinaison de la tangente à l'origine à la courbe $u(v)$ (courbes en pointillé).
- En chiffres romains : le mode considéré.

2° Deuxième mode.

Essai n°	$\Delta\lambda_2^*$	$\log_{10}\Delta\lambda_2^*$	u_{89}^*	$\log_{10}u_{89}^*$	$\Delta\left(\frac{du}{dv}\right)_0^*$	$\log_{10}\Delta\left(\frac{du}{dv}\right)_0^*$
1	26.749	4,427	316,9	2,501	4.764	3,678
2	1.139	3,056	40,47	1,607	1.153	3,062
3	9.166	3,962	122,6	2,088	2.285	3,359
4	6.819	3,834	98,11	1,992	1.952	3,290
5	7.000	3,845	100,00	2,000	2.000	3,301

3° Troisième mode.

Essai n°	$\Delta\lambda_3^*$	$\log_{10}\Delta\lambda_3^*$	u_{89}^*	$\log_{10}u_{89}^*$	$\Delta\left(\frac{du}{dv}\right)_0^*$	$\log_{10}\Delta\left(\frac{du}{dv}\right)_0^*$
1	753	2,877	429,4	2,633	10.925	4,039
2	20	1,301	33,34	1,523	574	2,759
3	443	2,646	269,0	2,430	6.545	3,816
4	50	1,699	50,19	1,701	1.000	3,000

La très faible courbure des courbes données sur le graphique de la figure 15 semble justifier pleinement l'emploi de l'interpolation linéaire pour l'amélioration de la valeur propre λ à partir d'anciennes valeurs d'essai.

Il est indifférent à cet effet d'utiliser le « résidu » u_{89} laissé par un λ d'essai, ou bien de se servir de l'inclinaison de la tangente à l'origine à la courbe $u(v)$; les courbes en pointillé et celles en trait interrompu ont des allures entièrement semblables.

e) Vérification de l'orthogonalité des fonctions propres des trois premiers modes. — Pour des raisons de simplicité exposées plus haut (pp. 98-99), on a calculé ici les intégrales :

$$\int_0^a \frac{u_i u_j}{\tau(v)} dv = \int_0^l u_i \xi_j dx \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

En procédant par la règle des rectangles, on a obtenu les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \int_0^l u_1 \xi_1 dx &= 5.220,2458 \times 10^{16} \text{m}^5; \\ \int_0^l u_2 \xi_2 dx &= 325,6723 \times 10^{16} \text{m}^5; \\ \int_0^l u_3 \xi_3 dx &= 584,3774 \times 10^{16} \text{m}^5; \\ \int_0^l u_1 \xi_2 dx &= -0,0781 \times 10^{16} \text{m}^5; \\ \int_0^l u_2 \xi_1 dx &= -0,0796 \times 10^{16} \text{m}^5; \\ \int_0^l u_2 \xi_3 dx &= 0,5086 \times 10^{16} \text{m}^5; \\ \int_0^l u_3 \xi_2 dx &= 0,5080 \times 10^{16} \text{m}^5; \end{aligned}$$

$$\int_0^l u_3 \xi_1 dx = -0,4290 \times 10^{16} \text{m}^5;$$

$$\int_0^l u_1 \xi_3 dx = -0,4295 \times 10^{16} \text{m}^5.$$

Les normes N_{ij} , racines carrées des produits des trois premières intégrales prises deux à deux, sont respectivement :

$$N_{12} = 1.303,875 \times 10^{16} \text{m}^5; \quad N_{23} = 436,252 \times 10^{16} \text{m}^5; \quad N_{31} = 1.746,595 \times 10^{16} \text{m}^5.$$

Les quotients des intégrales

$$\int_0^l u_i \xi_j dx \quad (i \neq j)$$

(on a calculé séparément, à titre de vérification,

$$\int_0^l u_i \xi_j dx \quad \text{et} \quad \int_0^l u_j \xi_i dx$$

et l'accord des résultats obtenus est pratiquement parfait) par les normes respectives sont :

$$(i = 1, j = 2): -0,000060,$$

$$(i = 2, j = 3): 0,001165,$$

$$(i = 3, j = 1): -0,000246,$$

(au lieu de la valeur zéro prévue par la théorie). Ces résultats permettent de conclure à une orthogonalité quasi rigoureuse des trois premiers modes normaux entre eux.

f) Les graphiques ci-après représentent les fonctions propres $u_1(v)$, $u_2(v)$ et $u_3(v)$ (en ordonnée u , en abscisse v), et la distribution des amplitudes ζ des seiches correspondantes, tout le long du lac (ordonnée ζ , abscisse x); ces derniers graphiques montrent comment le deuxième mode affecte surtout l'extrémité nord du lac et comment le troisième mode affecte aussi bien l'extrémité nord que l'extrémité sud, tandis que le fondamental présente des amplitudes à peine plus fortes dans la moitié nord que dans la moitié sud du lac.

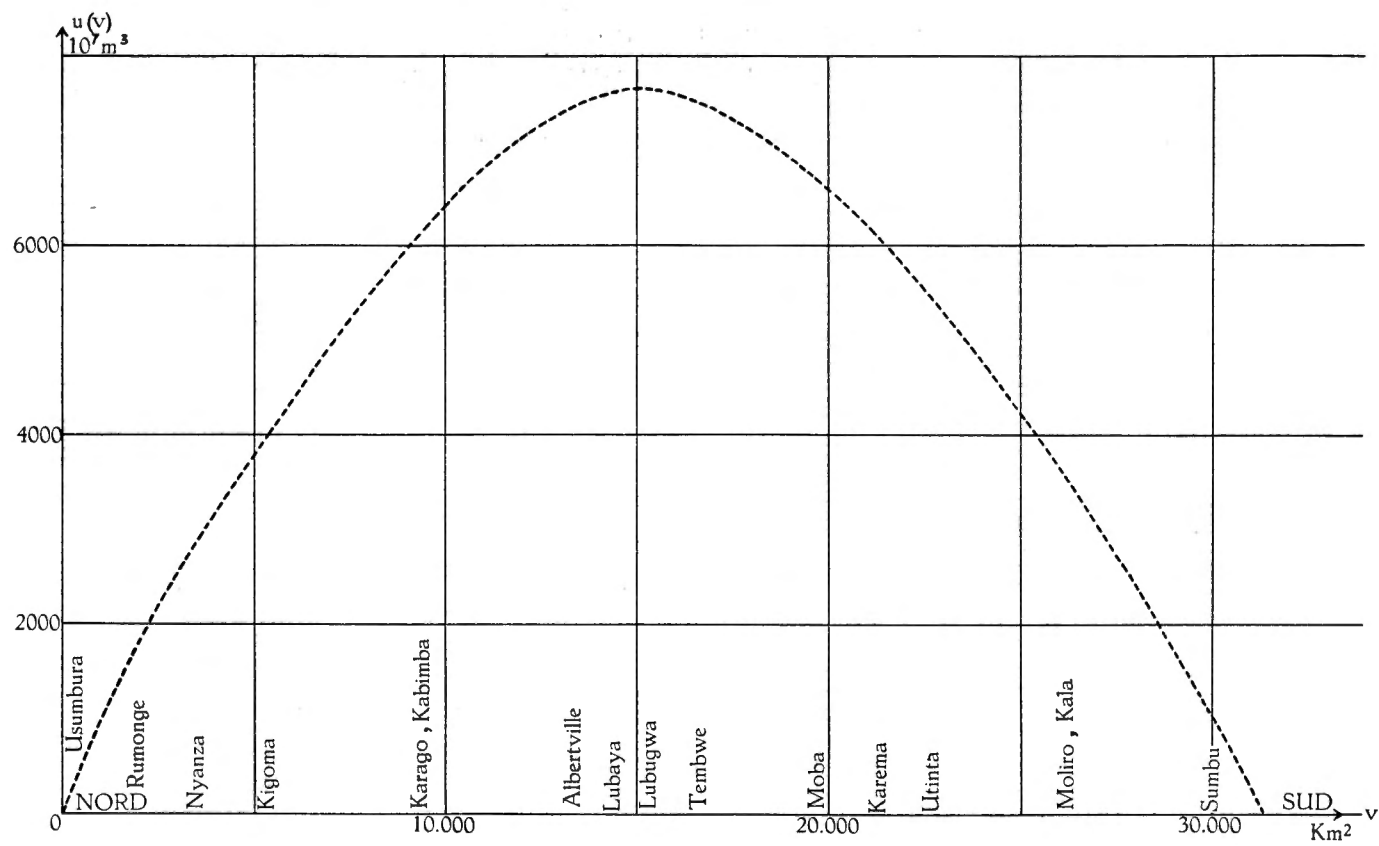


FIG. 16. — Lac Tanganika. Fonction propre du mode fondamental longitudinal.
(méthode de DEFANT; contour « rectifié »).

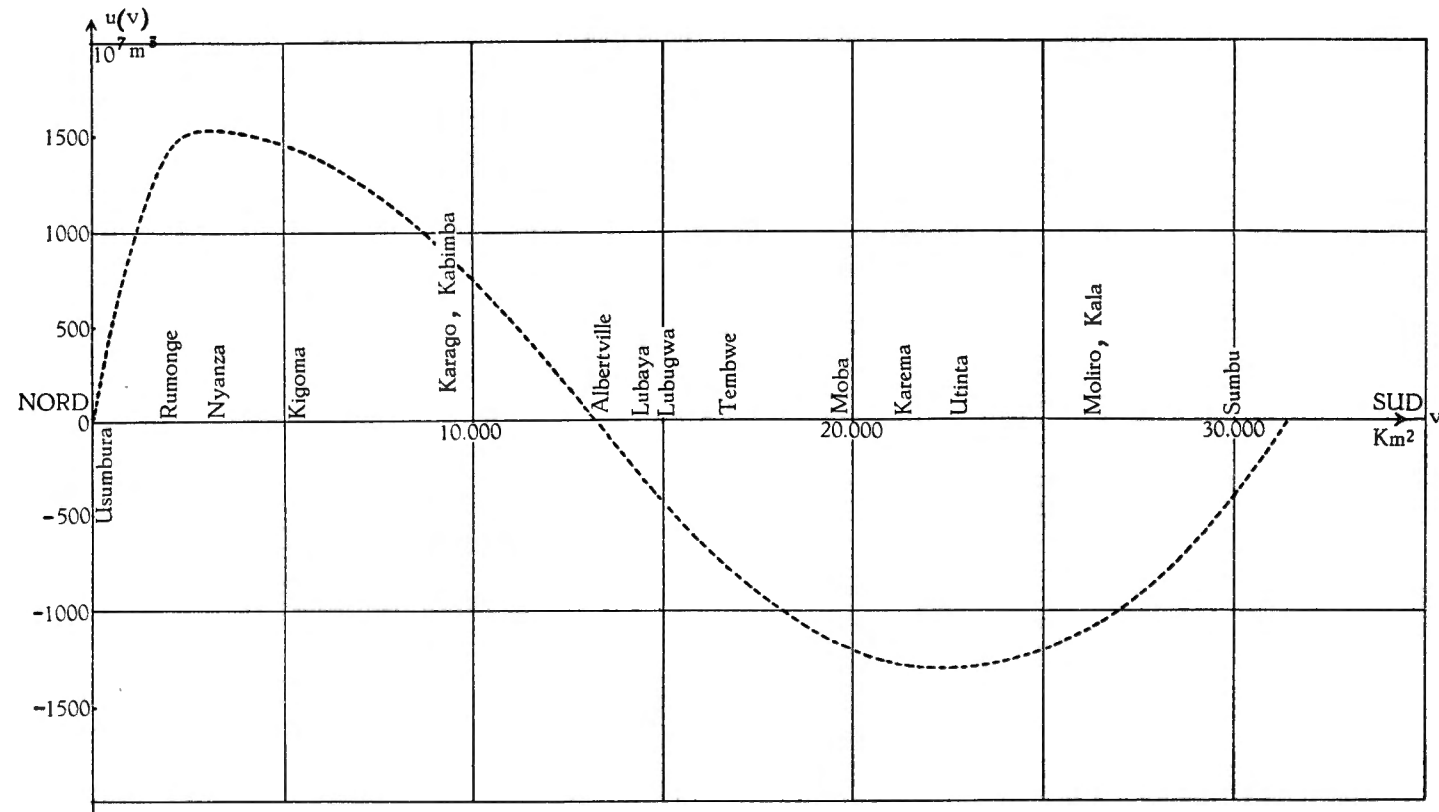


FIG. 17. — Lac Tanganyika. Fonction propre du 2^e mode longitudinal
(méthode de DEFANT; contour « rectifié »).

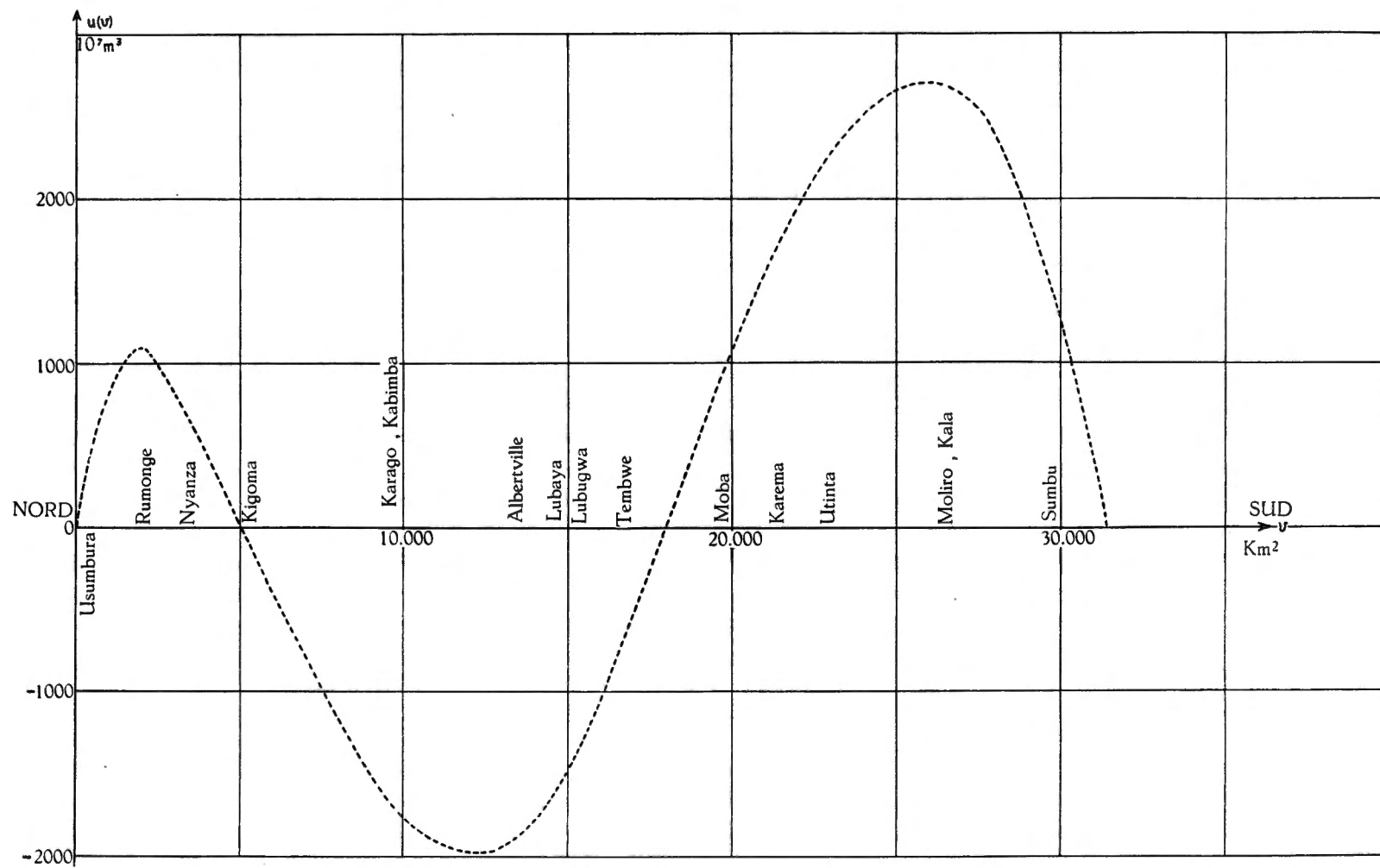


FIG. 18. — Lac Tanganika. Fonction propre du 3^e mode longitudinal
(méthode de DEFANT; contour « rectifié »).

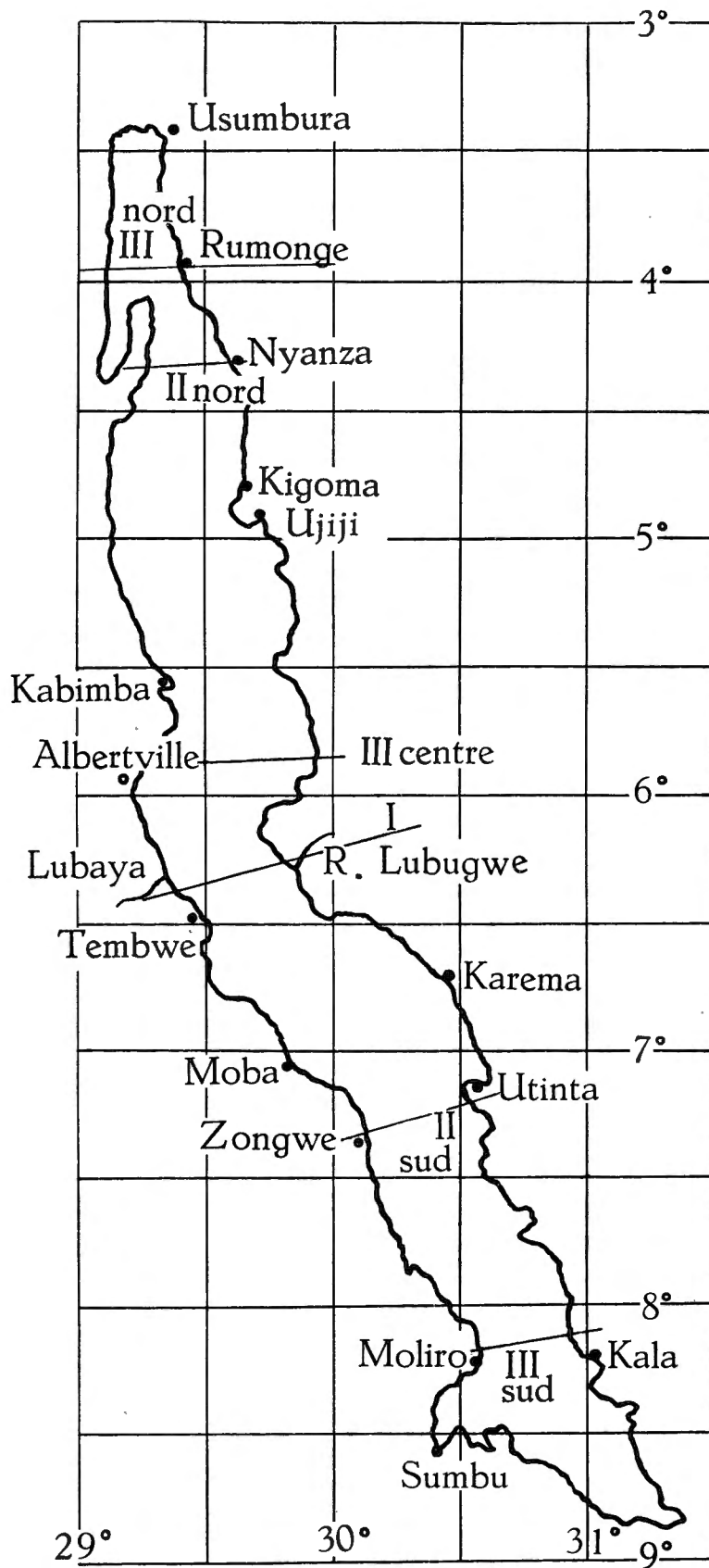


FIG. 19. — Lac Tanganika. Seiches longitudinales globales.
Positions des lignes nodales obtenues par la méthode de DEFANT (contour « rectifié »).

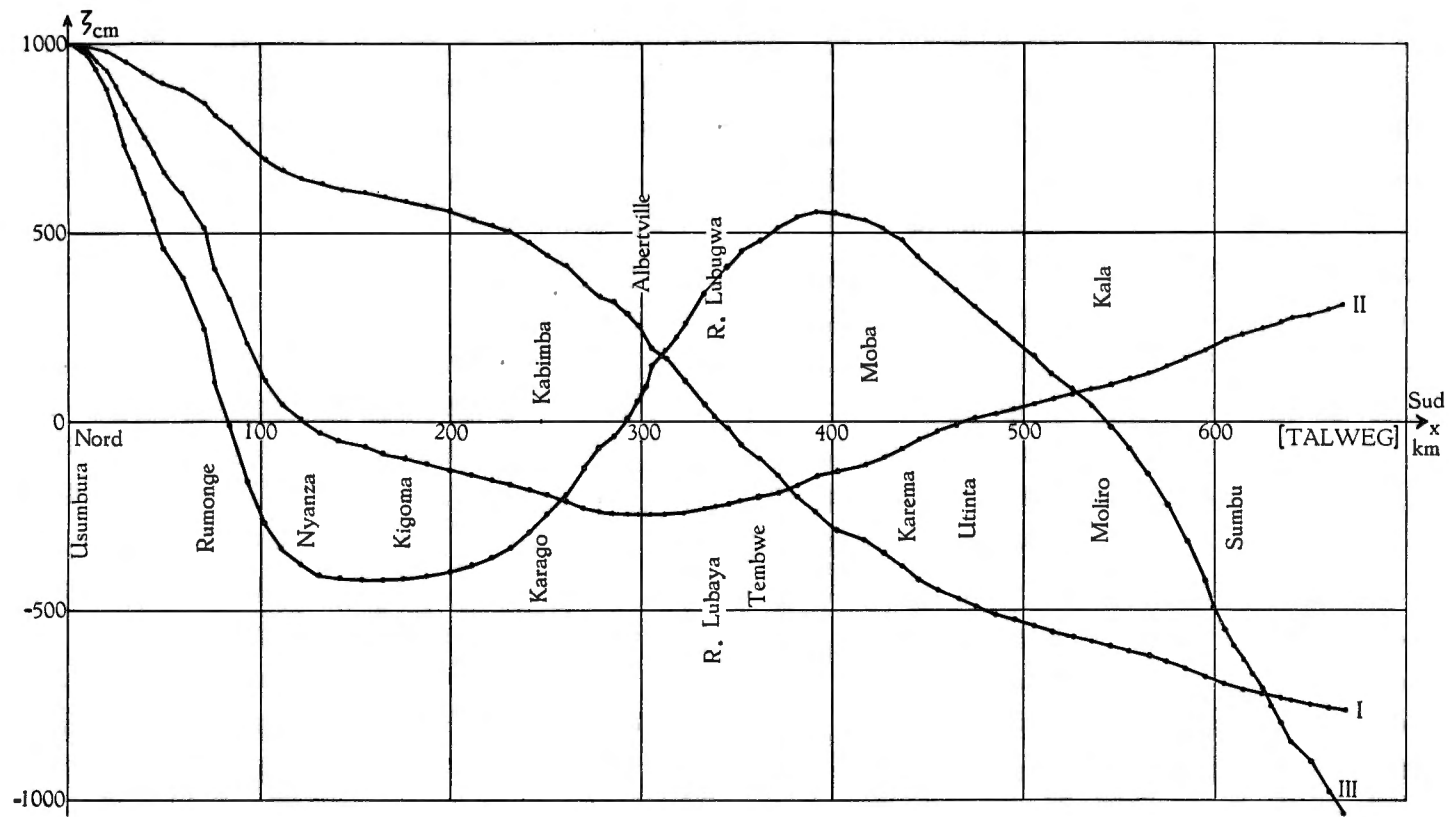


FIG. 20. — Lac Tanganika. Profil des seiches longitudinales globales (méthode de DEFANT ; contour « rectifié »).

g) Comparons maintenant les seiches du Tanganika, telles qu'elles ont été obtenues par la méthode de DEFANT, à celles d'un canal à fond plan et à celles d'un canal à fond parabolique. On peut dresser le tableau suivant (a = surface totale du lac ou canal; les données entre parenthèses se rapportent au Tanganika non « rectifié »).

Lac Tanganika	Canal à fond plan	Canal à fond parabolique
$T_1 = 15.346 \text{ sec (15.694 sec)}$	—	—
Nœud : $v/a = 0,4857 (0,4844)$	Nœud : $v/a = 0,5000$	Nœud : $v/a = 0,5000$
$T_2 = 8.284 \text{ sec (8.429 sec)}$	—	—
$T_2/T_1 = 0,5398 (0,5371)$	$T_2/T_1 = 0,5000$	$T_2/T_1 = 0,5774$
Nœuds : nord : $v/a = 0,1089 (0,1147)$	Nœuds : I : $v/a = 0,2500$	Nœuds : I : $v/a = 0,2113$
sud : $v/a = 0,7231 (0,7365)$	II : $v/a = 0,7500$	II : $v/a = 0,7887$
$T_3 = 6.414 \text{ sec (6.663 sec)}$	—	—
$T_3/T_1 = 0,4180 (0,4245)$	$T_3/T_1 = 0,3333$	$T_3/T_1 = 0,4082$
Nœuds : nord : $v/a = 0,0659 (0,0661)$	Nœuds : I : $v/a = 0,1667$	Nœuds : I : $v/a = 0,1127$
centre : $v/a = 0,3981 (0,4049)$	II : $v/a = 0,5000$	II : $v/a = 0,5000$
sud : $v/a = 0,8331 (0,8424)$	III : $v/a = 0,8333$	III : $v/a = 0,8873$

Le lac Tanganika s'écarte donc fortement des deux types de canaux réguliers envisagés, tant par les rapports des périodes des modes supérieurs à celle du fondamental, que par la distribution des amplitudes et des nœuds (cf. fig. 20). Il faut cependant remarquer que la fonction propre du fondamental, $u_1(v)$, ne s'écarte pas notablement d'une sinusoïde; cette propriété sera mise à profit pour le calcul du fondamental par une autre méthode (cf. § 5).

§ 3. CALCUL DES SEICHES PAR LA MÉTHODE VARIATIONNELLE DE W. RITZ-KHIDAKA.

N.B. — Les calculs numériques du présent paragraphe ont été effectués sur un lac non « rectifié ».

Prenons des fonctions d'essai dont les dérivées soient orthogonales afin d'obtenir un déterminant-équation aux valeurs propres séculaire.

Soit

$$\begin{aligned}\psi_1(v) &= \sin \frac{\pi v}{a} \quad (\text{87}) & \text{d'où } \psi'_1 &= \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi v}{a}; \\ \psi_2(v) &= \sin \frac{2\pi v}{a} & \psi'_2 &= \frac{2\pi}{a} \cos \frac{2\pi v}{a}; \\ \psi_3(v) &= \sin \frac{3\pi v}{a} & \psi'_3 &= \frac{3\pi}{a} \cos \frac{3\pi v}{a}.\end{aligned}$$

L'intégrale à minimiser est

$$I = \int_0^a \left[u'^2 - \frac{\lambda u^2}{\sigma(v)} \right] dv \quad \text{où} \quad u = \sum_{i=1}^3 A_i \psi_i(v)$$

(A_i = constantes à déterminer).

Les conditions de minimum s'écrivent

$$\frac{\partial I}{\partial A_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^a [(A_1 \psi'_1 + A_2 \psi'_2 + A_3 \psi'_3) \cdot \psi'_i - \frac{\lambda}{\sigma(v)} (A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 + A_3 \psi_3) \cdot \psi_i] dv = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Posons, pour abrégier,

$$\int_0^a \psi_i'^2 dv = [i, i]', \quad \text{et} \quad \int_0^a \frac{\psi_i \psi_j}{\sigma(v)} dv = (i, j).$$

La condition de compatibilité de ces trois équations s'écrit alors, compte tenu de l'orthogonalité des ψ'_i :

$$\begin{vmatrix} [1,1]' - \lambda(1,1) & -\lambda(1,2) & -\lambda(1,3) \\ -\lambda(2,1) & [2,2]' - \lambda(2,2) & -\lambda(2,3) \\ -\lambda(3,1) & -\lambda(3,2) & [3,3]' - \lambda(3,3) \end{vmatrix} = 0.$$

Les intégrales $[i, i]'$ se calculent directement; on a :

$$[1,1]' = \frac{\pi^2}{2a}; \quad [2,2]' = \frac{4\pi^2}{2a}; \quad [3,3]' = \frac{9\pi^2}{2a}.$$

Quant aux intégrales (i, j) , elles doivent être tabulées. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}(1,1) &= 88,4979 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}; & (1,2) &= 5,3853 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}; \\ (2,2) &= 83,8396 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}; & (2,3) &= -2,0172 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}; \\ (3,3) &= 111,5713 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}; & (3,1) &= -4,5401 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}.\end{aligned}$$

(87) Afin de simplifier les écritures, le facteur ayant les dimensions physiques (L^3) de $\psi_i(v)$ (volume balayé) est sous-entendu.

L'équation aux valeurs propres devient ainsi :

$$\begin{vmatrix} (1,51013 \times 10^{-14} \text{ cm}^{-2} & - 5,3853 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \cdot \lambda & 4,5401 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \cdot \lambda \\ - 88,4979 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \cdot \lambda) & & \\ - 5,3853 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \cdot \lambda & (6,04052 \times 10^{-14} \text{ cm}^{-2} & 2,0172 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \cdot \lambda \\ - 83,8396 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \cdot \lambda) & & \\ 4,5401 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \cdot \lambda & 2,0172 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \cdot \lambda & (13,5912 \times 10^{-14} \text{ cm}^{-2} \\ - 111,5713 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \cdot \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire, après simplification par 10^{-8} cm^{-3} et toutes réductions faites :

$$\begin{aligned} - 822,592,4 \cdot \lambda^3 + 174,086,36 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1} \cdot \lambda^2 - 10,003,97 \times 10^{-16} \text{ cm}^{-2} \cdot \lambda \\ + 123,978 \times 10^{-24} \text{ cm}^{-3} = 0. \end{aligned}$$

Les racines de cette équation sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1,7038 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}; \\ \lambda_2 &= 7,2385 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}; \\ \lambda_3 &= 12,2209 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}. \end{aligned}$$

On en tire :

$$\begin{aligned} T_1 &= 15,392 \text{ sec.} = 4 \text{ h. } 16 \text{ min. } 32 \text{ sec.} \\ T_2 &= 7,468 \text{ sec.} = 2 \text{ h. } 4 \text{ min. } 28 \text{ sec.} \\ T_3 &= 5,747 \text{ sec.} = 1 \text{ h. } 35 \text{ min. } 47 \text{ sec.} \end{aligned}$$

Les écarts respectifs par rapport aux résultats obtenus par la méthode de DEFANT atteignent pour les valeurs propres : 3,96 %, 27,42 % et 34,39 %, et pour les périodes : -1,92 %, -11,40 %, -13,75 %. On remarque que, conformément à ce qui a été dit page 55, les valeurs propres trouvées ici sont des approximations par excès des valeurs propres exactes; quant aux périodes, elles sont évidemment approchées par défaut.

On voit que les résultats fournis par la méthode de RITZ-HIDAKA sont fort médiocres pour le second et le troisième mode normal; seule la période du fondamental est obtenue avec une précision satisfaisante.

Reste à calculer les constantes A_i .

En introduisant les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dans les équations et en les résolvant par rapport à A_1, A_2, A_3 , on trouve les trois systèmes de valeurs suivants :

Mode fondamental :

$$\frac{A_2}{A_1} = 0,01994, \quad \frac{A_3}{A_1} = -0,0061, \quad \text{d'où} \quad u_1 = \sin \frac{\pi v}{a} + 0,01994 \sin \frac{2\pi v}{a} - 0,0061 \sin \frac{3\pi v}{a}.$$

Deuxième mode :

$$\frac{A_1}{A_2} = -0,0794, \quad \frac{A_3}{A_2} = -0,0217, \quad \text{d'où } u_2 = -0,0794 \sin \frac{\pi v}{a} + \sin \frac{2\pi v}{a} - 0,0217 \sin \frac{3\pi v}{a}.$$

Troisième mode :

$$\frac{A_1}{A_3} = 0,0559, \quad \frac{A_2}{A_3} = 0,0526, \quad \text{d'où } u_3 = 0,0559 \sin \frac{\pi v}{a} + 0,0526 \sin \frac{2\pi v}{a} + \sin \frac{3\pi v}{a}.$$

Etant donné le but des présents calculs (montrer la grande supériorité de la méthode de DEFANT sur celle de RITZ-HIDAKA), on n'a pas cru devoir vérifier l'orthogonalité des trois fonctions u_1 , u_2 , u_3 données ici, les calculs étant démesurément longs, puisqu'il s'agit d'une orthogonalité « généralisée » (cf. pp. 29-30).

Le fondamental et le second mode sont représentés de manière satisfaisante par les fonctions u_1 et u_2 .

Recherche des nœuds.

Mode fondamental : L'équation $\frac{du_1}{dv} = 0$ s'écrit

$$\frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi v}{a} + 0,01994 \cdot \frac{2\pi}{a} \cos \frac{2\pi v}{a} - 0,0061 \cdot \frac{3\pi}{a} \cos \frac{3\pi v}{a} = 0,$$

c'est-à-dire, en simplifiant par π/a et en exprimant $\cos(2\pi v/a)$ et $\cos(3\pi v/a)$ en fonction de $\cos(\pi v/a)$ (que l'on écrira z pour la simplicité) :

$$-0,0732 z^3 + 0,07976 z^2 + 1,0549 z - 0,03988 = 0.$$

Cette équation possède une racine très voisine de 0,04; les deux autres sont situées en dehors de l'intervalle $(-1, +1)$. Le nœud du fondamental se trouve être « très voisin » du milieu du lac, en effet : $z = 0,04$ donne $\pi v/a \simeq 1,536$ radian, c'est-à-dire $v \simeq 0,489 a$, résultat en très bon accord avec celui obtenu par la méthode de DEFANT ($v = 0,4844 a$), comme le montre la planche III.

Deuxième mode : L'équation $\frac{du_2}{dv} = 0$ s'écrit de même :

$$-0,2604 z^3 + 4 z^2 + 0,1159 z - 2 = 0,$$

dont les deux racines situées dans l'intervalle $(-1, +1)$ sont $z = 0,709$ et $z = -0,709$. On en tire $v/a = 0,2484$ et $v/a = 0,7516$, pour les nœuds nord et sud respectivement. Seul le second résultat est comparable à celui trouvé par la méthode de DEFANT (nœud nord : $v/a = 0,1147$; nœud sud : $v/a = 0,7365$), cf. planche III.

Troisième mode : L'équation $\frac{d u_3}{d v} = 0$ s'écrit :

$$4z^3 + 0,2104 z^2 - 2,9441 z - 0,1052 = 0,$$

et admet pour racines $z \simeq 0,85$, $z \simeq -0,85$ et $z \simeq -0,036$.

On en tire $v/a = 0,1792$ (nœud nord), $v/a = 0,4883$ (nœud central), $v/a = 0,8208$ (nœud sud), alors que la méthode DEFANT avait donné respectivement 0,0661, 0,4049, 0,8424. Le désaccord est à nouveau illustré par la planche III.

On voit donc que, tant pour les périodes que pour les fonctions propres et pour la position des nœuds, les résultats auxquels on aboutit par la méthode variationnelle de RITZ-HIDAKA ne sont satisfaisants que pour le mode fondamental et médiocres pour les modes supérieurs.

Les résultats publiés par P. CALOI et ses élèves dans les « Annali di Geofisica » (cf. pp. 88 sqq) et relatifs aux seiches des lacs italiens confirment invariablement la chose.

§ 4. CALCUL DE LA PÉRIODE DU MODE FONDAMENTAL PAR LA FORMULE DE DU BOYS.

On a, par cette formule $T_1 = 2 \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}$ (cf. p. 9), où $h(x)$ désigne la profondeur mesurée sur le Talweg (et non une profondeur moyenne pour chaque section droite).

Des mesures effectuées sur la carte du lac fournissent la table suivante :

Section n°	$h(x)$ m	$\sqrt{h(x)}$ m ^½	$\frac{\Delta x}{\sqrt{h(x)}}$ m ^½	Section n°	$h(x)$ m	$\sqrt{h(x)}$ m ^½	$\frac{\Delta x}{\sqrt{h(x)}}$ m ^½
1	150	12,2	450,8	16	650	25,5	372,5
2	230	15,1	331,1	17	850	29,2	308,2
3	250	15,8	316,5	18	900	30,0	316,7
4	260	16,1	310,6	19	1.000	31,6	316,0
5	290	17,0	294,1	20	1.100	33,2	301,2
6	305	17,5	285,7	21	1.250	35,4	367,2
7	310	17,6	284,1	22	1.250	35,4	282,5
8	330	18,2	274,7	23	1.310	36,2	317,7
9	300	17,3	289,0	24	1.310	36,2	317,7
10	280	16,7	299,4	25	1.250	35,4	353,1
11	300	17,3	578,0	26	1.250	35,4	324,9
12	350	18,7	588,2	27	1.250	35,4	282,5
13	350	18,7	267,4	28	1.220	34,9	272,2
14	350	18,7	427,8	29	1.200	34,6	289,0
15	500	22,4	424,1	30	1.175	34,3	277,0

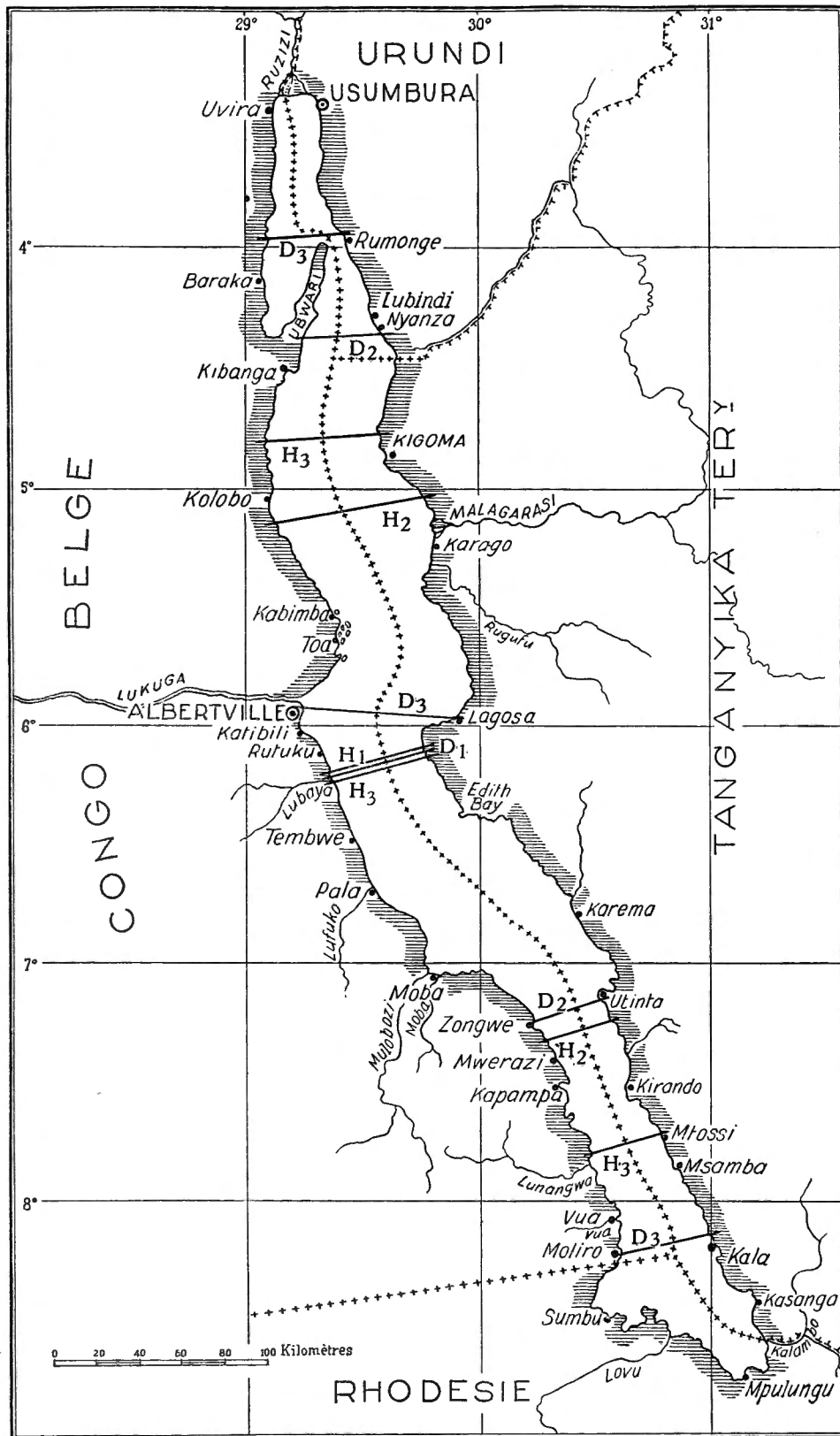


PLANCHE III. — Lac Tanganika.

Seiches longitudinales globales. Positions de lignes nodales obtenues par les méthodes de DEFANT (D) et de HIDAHA (H). L'accord est en général médiocre, sauf pour l'uniceud (D₁ et H₁ coïncident pratiquement) et le biceud sud (H₂ et D₂ sont voisins). Remarquer en outre l'inexactitude du tracé des rives de la presqu'île d'Ubwari et de la baie de Burton (cf. fig. 19 et planche II).

Section n°	$h(x)$ m	$\sqrt{h(x)}$ m ^½	$\frac{\Delta x}{\sqrt{h(x)}}$ m ^½	Section n°	$h(x)$ m	$\sqrt{h(x)}$ m ^½	$\frac{\Delta x}{\sqrt{h(x)}}$ m ^½
31	1.150	33,9	295,0	61	700	26,5	358,5
32	1.125	33,5	119,4	62	750	27,4	328,5
33	1.100	33,2	135,5	63	1.000	31,6	316,0
34	1.070	32,7	137,6	64	1.400	37,4	267,4
35	1.035	32,2	124,2	65	1.450	38,1	262,5
36	1.000	31,6	237,3	66	1.450	38,1	262,5
37	800	28,3	265,0	67	1.400	37,4	267,4
38	750	27,4	182,5	68	1.400	37,4	267,4
39	700	26,5	188,7	69	1.400	37,4	267,4
40	700	26,5	56,6	70	1.400	37,4	254,0
41	750	27,4	127,7	71	1.300	36,1	277,0
42	850	29,2	171,2	72	1.250	35,4	268,4
43	885	29,7	168,4	73	1.250	35,4	282,5
44	900	30,0	166,7	74	1.100	33,2	301,2
45	900	30,0	183,3	75	950	30,8	324,7
46	885	29,7	168,4	76	800	28,3	353,4
47	850	29,2	171,2	77	750	27,4	365,0
48	850	29,2	239,7	78	750	27,4	182,5
49	850	29,2	239,7	79	700	26,5	188,7
50	850	29,2	342,5	80	650	25,5	215,7
51	850	29,2	325,4	81	600	24,5	204,1
52	850	29,2	171,2	82	500	22,4	223,2
53	850	29,2	171,2	83	450	21,2	235,8
54	850	29,2	171,2	84	450	21,2	235,8
55	850	29,2	188,4	85	400	20,0	250,0
56	800	28,3	176,7	86	350	18,7	267,4
57	800	28,3	194,3	87	350	18,7	534,7
58	750	27,4	182,5	88	200	14,1	709,2
59	700	26,5	358,5	89	65	8,1	925,9
60	700	26,5	358,5				

Le total des colonnes $\Delta x/\sqrt{h(x)}$ est égal à 25.335,2 m^½ ; multiplions par $2/\sqrt{g} = 0,639553$ m^{-½} sec. : il vient : $T_1 = 16.203$ sec., c'est-à-dire 4 h. 30 min. 3 sec., valeur qui excède de 5,6 % celle trouvée par la méthode de DEFANT. Ce résultat est satisfaisant, étant donné que l'estimation de $h(x)$ sur le Talweg est souvent malaisée sur une carte qui ne donne que les courbes isobathes et que les dernières sections (à l'extrémité sud du lac), très peu profondes, et dont l'influence sur la période d'oscillation fondamentale est par suite faible, voient ici leur rôle exagéré (cf. les valeurs de $\Delta x/\sqrt{h(x)}$ pour les sections 87 à 89 !); l'erreur (c'est-à-dire l'écart par rapport au résultat trouvé par la méthode de DEFANT, considéré comme « exact ») est précisément de l'ordre de 1.500 m^½ sur la somme des $\Delta x/\sqrt{h(x)}$.

Remarque. — Il semblerait à première vue qu'on pourrait remplacer la

formule de DU BOYS par la formule

$$T_1 = 2 \int_0^a \frac{dv}{\sqrt{g\sigma(v)}},$$

obtenue en multipliant numérateur et dénominateur dans la formule de DU BOYS par $b(x)$: en effet

$$v(x) = \int_0^x b(x) dx, \quad S(x) = b(x) \cdot h(x), \quad S(x) \cdot b(x) = \sigma(v).$$

Mais cela revient à prendre pour $h(x)$ une profondeur moyenne, et non une profondeur mesurée sur le Talweg, puisque l'égalité $S(x) = b(x) \cdot h(x)$ n'a lieu que si $h(x)$ désigne une profondeur moyenne pour la section droite (cf. p. 9).

A titre de vérification, on a fait le calcul et l'on a trouvé :

$$\sum \frac{\Delta v}{\sqrt{\sigma(v)}} = 29.415,77 \text{ m}^{\frac{1}{2}} \quad \text{d'où} \quad T_1 = 18.812 \text{ sec.} = 5 \text{ h. } 13 \text{ min. } 32 \text{ sec.},$$

soit une valeur qui excède de **22,6 %** celle trouvée par la méthode de DEFANT; un tel résultat est évidemment inacceptable.

§ 5. CALCUL DE LA PÉRIODE DU MODE FONDAMENTAL PAR LA MÉTHODE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DE FREDHOLM ⁽⁸⁸⁾.

On a montré comment l'équation de CHRYSTAL

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0, \tag{I.10}$$

avec ses conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$, peut se transformer en une équation intégrale de FREDHOLM

$$u(v) + \lambda \int_0^a \frac{u(z) K(v,z)}{\sigma(z)} dz = 0, \tag{II.7}$$

et comment λ s'obtient par itération, à partir d'une fonction d'essai $u_{(1)}(v)$, les valeurs successives λ' , λ'' etc., ainsi trouvées convergeant vers la valeur propre cherchée.

⁽⁸⁸⁾ Pour l'exposé de cette méthode, cf. pp. 77 sqq.

Prenons comme valeur d'essai $u_{(1)}(v) = \sin(\pi v/a)$ (le facteur donnant à $u_{(1)}(v)$ les dimensions d'un volume étant à nouveau sous-entendu). La fonction de GREEN $G(v, z)$ de l'équation de CHRYSTAL est, compte tenu des conditions-frontière :

$$G(v, z) = \frac{v-a}{a} \cdot z \quad \text{pour } z \leq v,$$

$$G(v, z) = \frac{z-a}{a} \cdot v \quad \text{pour } z \geq v \text{ }^{(89)}.$$

Prenons comme valeur fixe de v , $v_0 = a/2$; le noyau $K(v, z)$ de l'équation intégrale prend ainsi la forme très simple

$$K(v_0, z) = -\frac{1}{2} z \quad \text{pour } z \leq \frac{a}{2},$$

$$K(v_0, z) = -\frac{1}{2} (a-z) \quad \text{pour } z \geq \frac{a}{2}.$$

Si l'on pose $u_{(1)}(a/2) = 1$, l'équation en λ devient :

$$1 = \lambda \int_0^{a/2} \frac{\frac{1}{2} z \sin \frac{\pi z}{a}}{\sigma(z)} dz + \lambda \int_{a/2}^a \frac{\frac{1}{2} (a-z) \sin \frac{\pi z}{a}}{\sigma(z)} dz.$$

Il suffit maintenant de tabuler les deux intégrales pour trouver une première valeur approchée de λ . On obtient :

Section n°	$\frac{z}{\sigma(z)}$ 10 ⁻⁶ cm ⁻¹	$\frac{\frac{1}{2} z \cdot \sin \frac{\pi z}{a}}{\sigma(z)} \Delta z$ 10 ⁴ cm	Section n°	$\frac{z}{\sigma(z)}$ 10 ⁻⁶ cm ⁻¹	$\frac{\frac{1}{2} z \cdot \sin \frac{\pi z}{a}}{\sigma(z)} \Delta z$ 10 ⁴ cm
1	20,21	13,13	16	55,40	1.673,26
2	29,88	46,25	17	35,08	1.521,70
3	47,37	101,73	18	28,03	2.058,26
4	60,99	174,12	19	18,19	1.769,84
5	74,21	232,97	20	14,32	2.004,86
6	76,96	282,67	21	14,89	2.024,26
7	67,82	305,34	22	15,76	2.425,24
8	65,44	373,08	23	16,90	2.341,62
9	71,00	474,27	24	21,39	3.095,44
10	76,55	638,76	25	18,71	3.648,05
11	62,36	992,74	26	20,05	4.055,54
12	58,97	1.742,16	27	24,18	5.104,37
13	178,60	2.303,75	28	36,51	7.460,31
14	136,41	2.594,02	29	54,75	12.219,56
15	83,73	2.397,27	30	47,69	9.612,48

⁽⁸⁹⁾ Cf. COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme und ihre Numer. Behandlung*, Chelsea, New-York, 1948, pp. 78, 83.

Section n°	$\frac{z}{\sigma(z)}$	$\frac{\frac{1}{2} z \cdot \sin \frac{\pi z}{a}}{\sigma(z)} \Delta z$	Section n°	$\frac{z}{\sigma(z)}$	$\frac{\frac{1}{2} z \cdot \sin \frac{\pi z}{a}}{\sigma(z)} \Delta z$
	10^{-6} cm^{-1}	10^4 cm		10^{-6} cm^{-1}	10^4 cm
31	64,03	13.023,28	41	79,61	8.594,58
32	76,70	8.010,24	42	86,46	14.672,74
33	75,25	7.897,19	43	125,15	18.185,48
34	54,97	7.083,74	44	140,53	18.825,47
35	51,53	7.064,40	45	159,45	19.198,91
36	57,79	15.103,88	46	173,66	20.345,83
37	67,83	19.013,36	47	190,49	20.066,55
38	77,07	13.028,53	48	179,76	23.359,45
39	93,71	15.809,85	48bis	121,24	17.579,80
40	108,67	5.493,18	(⁹⁰)		

Section n°	$\frac{a-z}{\sigma(z)}$	$\frac{\frac{1}{2} (a-z) \cdot \sin \frac{\pi z}{a}}{\sigma(z)} \Delta z$	Section n°	$\frac{a-z}{\sigma(z)}$	$\frac{\frac{1}{2} (a-z) \cdot \sin \frac{\pi z}{a}}{\sigma(z)} \Delta z$
	10^{-6} cm^{-1}	10^4 cm		10^{-6} cm^{-1}	10^4 cm
49	120,51	1.385,86	70	21,40	2.979,95
50	95,78	22.957,32	71	21,35	2.967,56
51	93,28	21.862,00	72	24,48	3.020,63
52	67,68	9.031,05	73	22,92	2.405,83
53	56,50	8.985,52			
54	52,20	8.713,38	74	31,99	2.926,27
55	48,67	8.678,60	75	37,15	2.997,33
56	51,70	7.723,26	76	33,39	2.483,05
57	50,97	7.040,22	77	27,52	1.760,18
58	52,56	6.427,74	78	22,06	682,53
59	53,92	13.763,49	79	20,86	613,91
60	47,50	14.018,79	80	15,82	462,97
61	55,62	15.251,75	81	20,10	470,96
62	49,25	12.522,78	82	21,93	382,24
63	36,03	8.636,51	83	21,72	339,43
64	31,66	7.404,57	84	20,48	266,43
65	35,06	6.763,74	85	29,13	294,60
66	34,04	5.609,15	86	26,18	220,56
67	30,18	4.567,78	87	25,59	228,32
68	26,66	4.074,90	88	18,84	48,90
69	22,91	3.227,34	[89	> 1	0]

La somme des deux intégrales est égale à $569.240,91 \times 10^4 \text{ cm}$.

(⁹⁰) La division 48bis est une division supplémentaire (où $v = 15.713 \text{ km}^2$), qu'il était nécessaire d'introduire afin de pouvoir calculer les deux intégrales cherchées en tenant compte de leurs limites exactes; en effet, le point $a/2$ tombe entre la 48^e et la 49^e division (cf. p. 111).

On en tire $\lambda_1 = 1,756725 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, d'où $T_1 = 15.159 \text{ sec.} = 4 \text{ h. } 12 \text{ min. } 39 \text{ sec.}$ En comparant ces résultats à ceux trouvés par la méthode de DEFANT, on voit que l'écart sur la valeur propre λ_1 est de 2,48 % seulement, et de -1,22 % sur la période T_1 .

Ce résultat est d'une précision extraordinaire, due vraisemblablement au fait que la fonction propre $u_1(v)$ du mode fondamental se trouve (par hasard) être très peu différente d'une sinusoïde, comme semblait déjà le montrer la courbe obtenue par la méthode de DEFANT, et comme le confirme le résultat trouvé par le procédé RITZ-HIDAKA (cf. pp. 136-137). La chose vaut en tout cas la peine d'être examinée; à cet effet, on a dressé, dans les pages qui suivent, une table où sont données en regard l'une de l'autre les fonctions $u_1(v)$ (méthode de DEFANT) et $\sin(\pi v/a)$; une courbe complète la comparaison.

On peut ainsi se rendre compte combien la fonction $u_1(v)$ diffère peu d'une sinusoïde.

Pour les modes supérieurs, le procédé de l'équation intégrale de FREDHOLM ne semble guère pratique. Un essai a été fait pour le second mode, en prenant comme première fonction d'essai : $u_2(v) = \sin(2\pi v/a)$; le résultat est très peu satisfaisant : l'erreur sur λ_2 est de l'ordre de 50 %. On pouvait du reste plus ou moins s'y attendre, étant donné que la fonction d'essai utilisée devait être, à en juger par la courbe dressée à partir des résultats trouvés par la méthode de DEFANT, une approximation fort grossière. Des itérations répétées auraient sans doute permis d'améliorer ce résultat, mais la longueur démesurée des calculs que cela nécessite enlève à la méthode de son intérêt pratique.

Voici encore, pour finir, la table de comparaison annoncée pour les fonctions $u_1(v)$ (méthode de DEFANT) et $\sin(\pi v/a)$.

Afin de faire prendre à la première la valeur 1 au point $v = a/2 = 15.713 \text{ km}^2$, elle a été multipliée par $1,30668 \times 10^{-11} \text{ m}^{-3}$ (valeur tirée de la table des pages 114-115); la comparaison est ainsi grandement facilitée.

Section n°	v km ²	$\sin \frac{\pi v}{a}$	$u_1(v)$	Section n°	v km ²	$\sin \frac{\pi v}{a}$	$u_1(v)$
1	114	0,01140	0,01490	11	1.420	0,1415	0,1750
2	242	0,02419	0,03154	12	1.758	0,1748	0,2124
3	361	0,03609	0,04692	13	1.895	0,1883	0,2269
4	480	0,04798	0,06216	14	2.083	0,2023	0,2460
5	587	0,05868	0,07569	15	2.331	0,2309	0,2697
6	693	0,0692	0,0889	16	2.569	0,2538	0,2914
7	805	0,0804	0,1027	17	2.875	0,2835	0,3181
8	928	0,0927	0,1176	18	3.325	0,3263	0,3563
9	1.055	0,1052	0,1327	19	3.844	0,3749	0,3991
10	1.195	0,1192	0,1491	20	4.489	0,4340	0,4512

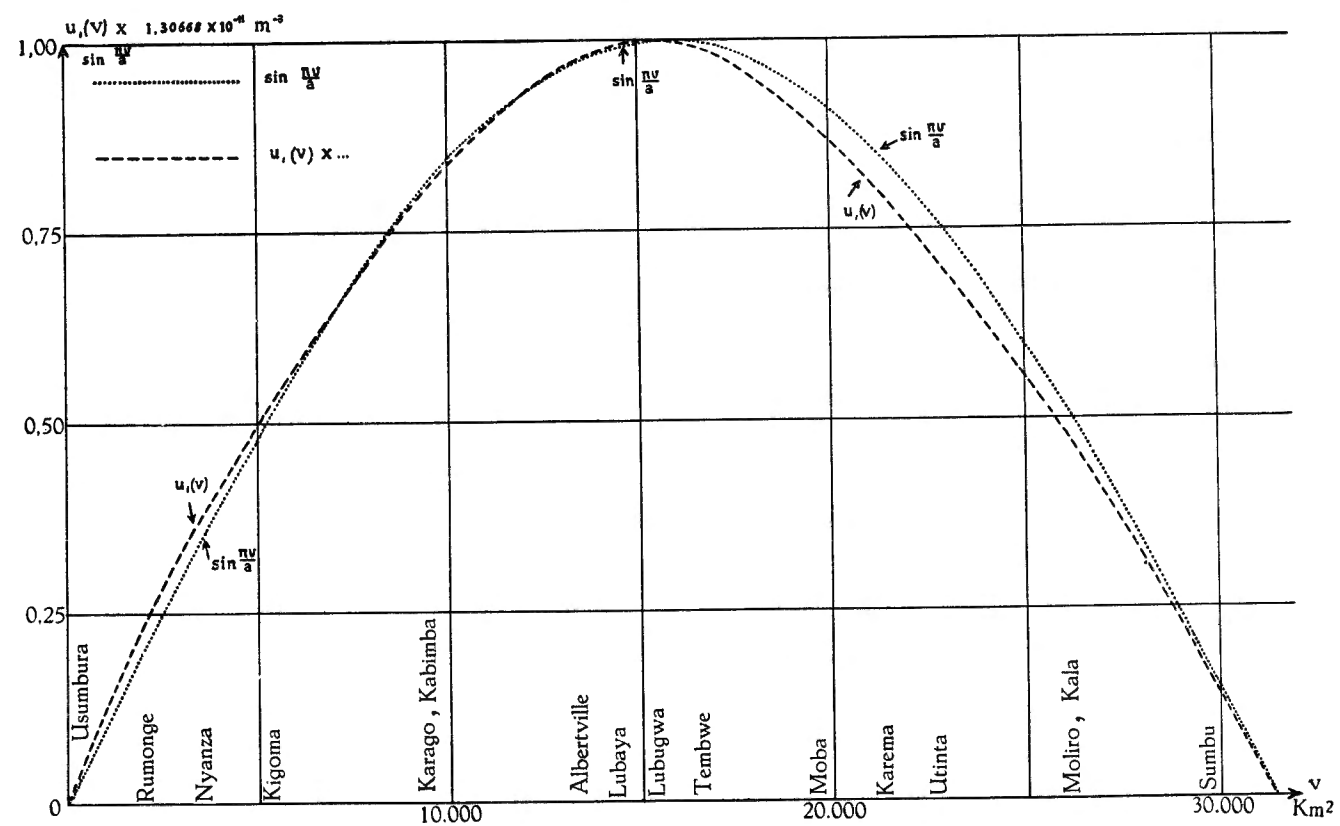


FIG. 21. — Lac Tanganika (contour « rectifié »).

Comparaison de la fonction propre du mode fondamental longitudinal $u_1(v)$ (méthode de DEFANT) avec la fonction $\sin(\pi v/a)$.

Section n°	v km ²	$\sin \frac{\pi v}{a}$	$u_1(v)$	Section n°	v km ²	$\sin \frac{\pi v}{a}$	$u_1(v)$
21	5.051	0,4838	0,4959	56	18.293	0,9669	0,9357
22	5.628	0,5334	0,5407	57	18.581	0,9592	0,9254
23	6.111	0,5736	0,5775	58	18.838	0,9517	0,9155
24	6.584	0,6119	0,6101	59	19.385	0,9333	0,8933
25	7.177	0,6576	0,6557	60	20.035	0,9081	0,8639
26	7.755	0,6999	0,6963	61	20.658	0,8803	0,8330
27	8.326	0,7395	0,7351	62	21.256	0,8504	0,8006
28	8.854	0,7740	0,7697	63	21.842	0,8181	0,7667
29	9.363	0,8052	0,8015	64	22.440	0,7822	0,7302
30	9.847	0,8329	0,8294	65	22.955	0,7492	0,6975
31	10.321	0,8582	0,8551	66	23.414	0,7180	0,6672
32	10.561	0,8703	0,8669	67	23.855	0,6864	0,6372
33	10.799	0,8819	0,8782	68	24.324	0,6518	0,6043
34	11.087	0,8949	0,8912	69	24.781	0,6165	0,5714
35	11.389	0,9079	0,9047	70	25.263	0,5778	0,5359
36	11.951	0,9301	0,9275	71	25.783	0,5346	0,4968
37	12.541	0,9502	0,9496	72	26.285	0,4916	0,4581
38	12.893	0,9605	0,9612	73	26.751	0,4505	0,4215
39	13.241	0,9696	0,9714	74	27.197	0,4102	0,3855
40	13.345	0,9721	0,9740	75	27.633	0,3701	0,3495
41	13.566	0,9770	0,9793	76	28.087	0,3276	0,3108
42	13.911	0,9838	0,9867	77	28.536	0,2849	0,2716
43	14.205	0,9885	0,9920	78	28.772	0,2622	0,2504
44	14.475	0,9923	0,9957	79	29.019	0,2383	0,2281
45	14.717	0,9951	0,9982	80	29.296	0,2113	0,2029
46	14.952	0,9971	0,9996	81	29.547	0,1867	0,1798
47	15.163	0,9985	0,9999	82	29.757	0,1660	0,1603
48	15.423	0,9996	0,9992	83	29.973	0,1447	0,1402
49	15.736	1,0000	0,9967	84	30.183	0,1239	0,1203
50	16.216	0,9987	0,9906	85	30.376	0,1048	0,1020
51	16.687	0,9952	0,9819	86	30.574	0,0851	0,0830
52	16.956	0,9921	0,9755	87	30.946	0,04797	0,04690
53	17.278	0,9878	0,9671	88	31.261	0,01648	0,01592
54	17.618	0,9819	0,9573	89	31.426	0,0000	-0,00047
55	17,984	0,9744	0,9460				

§ 6. PREMIERS RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

Au moment de l'impression de ce travail (octobre 1955), des limnogrammes enregistrés à la station d'Usumbura pendant l'été 1955 nous ont été communiqués par M. CH. MANNEBACK; ces enregistrements, quoique fort imparfaits et partiels, semblent révéler nettement des périodes d'oscillation voisines de 4 h. 30 min., 2 h. 15 min. et 1 h. 40 min.; il pourrait s'agir là des trois premiers

modes globaux calculés dans ce chapitre IV. Il faudra toutefois attendre la publication de limnogrammes enregistrés sur tout le pourtour du lac avant de pouvoir conclure à un accord entre la théorie et l'expérience.

CHAPITRE V.

LES SEICHES LONGITUDINALES PARTIELLES DU LAC TANGANIKA.

Outre les seiches longitudinales, il faut s'attendre à ce que le lac Tanganika, à cause de sa longueur et de la disposition même de ses masses d'eau, soit le siège de seiches longitudinales partielles, affectant de manière particulière tel ou tel de ses « bassins ».

L'examen de la courbe normale du lac montre que celui-ci peut être considéré comme composé de deux grands bassins principaux, de superficies sensiblement égales : le bassin nord (15.535 km^2) et le bassin sud (16.263 km^2), reliés entre eux par l'étranglement de Lubaya-Lubugwe.

Dans le bassin nord, on peut encore distinguer :

le « golfe » d'Uvira-Rumonge, qui constitue l'extrémité nord du lac (au nord de la ligne Rumonge-Cap Banza);

la baie de Burton, qui prolonge vers le sud-ouest le « golfe » précédent;

le reste du bassin nord (depuis Rumonge jusqu'à l'étranglement Lubaya-Lubugwe). Il est vrai que la courbe normale y présente encore un minimum accusé autour de la ligne Kabimba-Karago, mais il paraît difficile d'y voir un véritable étranglement ou même un seuil.

Le bassin sud, au contraire, forme un seul tout, malgré quelques minima peu marqués de la courbe normale, à hauteur de Karema, Utinta et Moliro. Il est intéressant de remarquer que si l'on considère le lac comme une seule masse d'eau (comme on l'a fait au chapitre précédent) oscillant dans son entièreté, le nœud du mode fondamental se trouve précisément au voisinage de l'étranglement Lubaya-Lubugwe.

L'examen de la courbe d'impédance au voisinage des deux principaux étranglements (celui de Rumonge et celui de Lubaya-Lubugwe), pour chacun des trois modes normaux étudiés dans le chapitre précédent, va permettre de décider dans quelle mesure la division en bassins proposée ci-dessus correspond à une réalité physique.

Une fois cette question tranchée, chacun des bassins partiels sera éventuellement étudié séparément, en étant considéré comme ouvert, à une seule ou aux deux extrémités, suivant la place qu'il occupe dans le complexe du Tanganika. La disposition particulière des masses d'eau, toujours très considérables et étalées en longueur, ainsi que l'étroitesse (relative !) des étranglements ou seuils par lesquels les bassins communiquent entre eux, permettra sans doute de traiter ces derniers comme s'ils débouchaient sur des masses d'eau infinies;

ce point de vue paraît d'autant plus acceptable que les seiches sont des oscillations d'amplitude très faible par rapport à la profondeur des masses d'eau qu'elles affectent. L'on est ainsi amené, pour les calculs de seiches longitudinales partielles, à postuler l'existence d'une ligne nodale ($\zeta = 0$) à l'embouchure de chaque bassin (contrairement à ce qui a lieu pour les extrémités fermées, où l'on a un ventre : $\partial\zeta/\partial x = 0$); en effet, les étranglements ne paraissent guère assez marqués pour justifier des « corrections d'embouchure » (du type de celle que Lord RAYLEIGH introduit dans sa théorie du tuyau d'orgue ouvert, et reprise par K. HONDA et ses collaborateurs dans leur méthode, exposée pp. 83 sqq.).

**§ 1. ÉTUDE DES COURBES D'IMPÉDANCE
RELATIVES AUX TROIS PREMIERS MODES LONGITUDINAUX
GLOBAUX DU LAC.**

L'impédance Z étant égale (à un facteur constant près) à ζ/u , on a reproduit, dans les tables ci-dessous, la valeur de ce quotient tirée des résultats obtenus dans chacun des derniers essais effectués par la méthode de DEFANT (cf. pp. 113-122).

1° Autour du premier étranglement (Rumonge-Cap Banza, section 13).

Section n°	v km ²	ζ/u 1 ^{er} mode 10 ⁻¹³ cm ⁻²	ζ/u 2 ^e mode 10 ⁻¹³ cm ⁻²	ζ/u 3 ^e mode 10 ⁻¹³ cm ⁻²
7	805	1,197	1,082	0,9680
8	928	1,0302	0,9087	0,7850
9	1.055	0,8987	0,7710	0,6386
10	1.195	0,7853	0,6496	0,5058
11	1.420	0,6564	0,5269	0,3833
12	1.758	0,5212	0,3872	0,2284
13	1.895	0,4663	0,2955	0,0951
14	2.083	0,4137	0,2245	-0,0067
15	2.331	0,3551	0,1366	-0,1509
16	2.569	0,3117	0,0721	-0,2730
17	2.875	0,2743	0,0296	-0,3836
18	3.325	0,2383	0,0044	-0,5265

2° Autour du second étranglement (Lubaya-Lubugwe, section 47).

Section n°	v km ²	ζ/u 1 ^{er} mode 10 ⁻¹³ cm ⁻²	ζ/u 2 ^e mode 10 ⁻¹³ cm ⁻²	ζ/u 3 ^e mode 10 ⁻¹³ cm ⁻²
41	13.566	0,0244	2,892	-0,0855
42	13.911	0,0218	1,446	-0,1029
43	14.205	0,0179	1,008	-0,1294
44	14.475	0,0140	0,7843	-0,1575
45	14.717	0,0103	0,6501	-0,1870

Section n°	v	ζ/u 1 ^{er} mode	ζ/u 2 ^e mode	ζ/u 3 ^e mode
	km ²	10 ⁻¹³ cm ⁻²	10 ⁻¹³ cm ⁻²	10 ⁻¹³ cm ⁻²
46	14.952	0,0058	0,5524	-0,2237
47	15.163	0,0016	0,4832	-0,2612
48	15.423	-0,0026	0,4179	-0,3082
49	15.736	-0,0083	0,3540	-0,3818
50	16.216	-0,0128	0,2914	-0,5060
51	16.687	-0,0188	0,2406	-0,7231
52	16.956	-0,0242	0,2100	-0,9445

L'examen des figures 22 et 23 ci-après, qui représentent la fonction $\Xi(v) = \zeta/u$ pour chacun des trois modes étudiés et autour des deux étranglements en question, montre clairement :

a) que l'impédance correspondant au mode fondamental ne présente aucune discontinuité, ni au voisinage du premier étranglement (Rumonge), ni à proximité du second (Lubaya-Lubugwe);

b) que l'impédance correspondant au deuxième mode présente une légère discontinuité au premier étranglement (Rumonge) et n'en présente aucune à proximité du second (Lubaya-Lubugwe). Si l'on convient de désigner par Z'_2 et Z''_2 la valeur de cette impédance au nord et au sud respectivement du premier étranglement (cf. fig. 22), on a approximativement $Z''_2 = 0,90 Z'_2$;

c) que l'impédance correspondant au troisième mode se comporte d'une manière entièrement semblable à la précédente; on a de même, en désignant par Z'_3 et Z''_3 ses valeurs respectives au nord et au sud du premier étranglement : $Z''_3 = 0,70 Z'_3$.

Quant à l'écart entre la courbe d'impédance et la courbe des cotg, il reflète simplement l'écart de la fonction propre (courbe d'abscisse v et d'ordonnée u) par rapport à une sinusoïde, ou en d'autres termes, l'écart du lac par rapport à un canal de section rectangulaire uniforme (dont les fonctions propres d'oscillation libre sont précisément des sinusoïdes). Les discontinuités éventuelles révèlent les endroits de variation rapide (à l'échelle de la longueur d'onde du mode correspondant) des paramètres $b(x)$ et $S(x)$ (cf. pp. 26 sqq., méthode de GREEN); en toute rigueur, l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides n'est pas applicable à ces portions du lac, mais on a vu, à propos du lac de Genève, que les erreurs qui en résultent dans les résultats sont négligeables (cf. p. 96); elles correspondent en quelque sorte à une « perte de longueur » dans ces portions du lac.

L'absence de discontinuité dans la courbe d'impédance du mode fondamental, au voisinage des deux étranglements, autorise à conclure qu'une onde sinusoïdale progressive de pression, de longueur double de celle du lac et se

propageant avec la même vitesse (lentement variable le long du Talweg) que le mode fondamental calculé au chapitre précédent, ne subit pas de réflexions aux deux étranglements, mais seulement aux extrémités du lac, et donne donc naissance à l'onde stationnaire qui n'est autre que ce même mode fondamental (résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie). Il en résulte que si l'on veut traiter séparément le bassin nord (depuis Uvira-

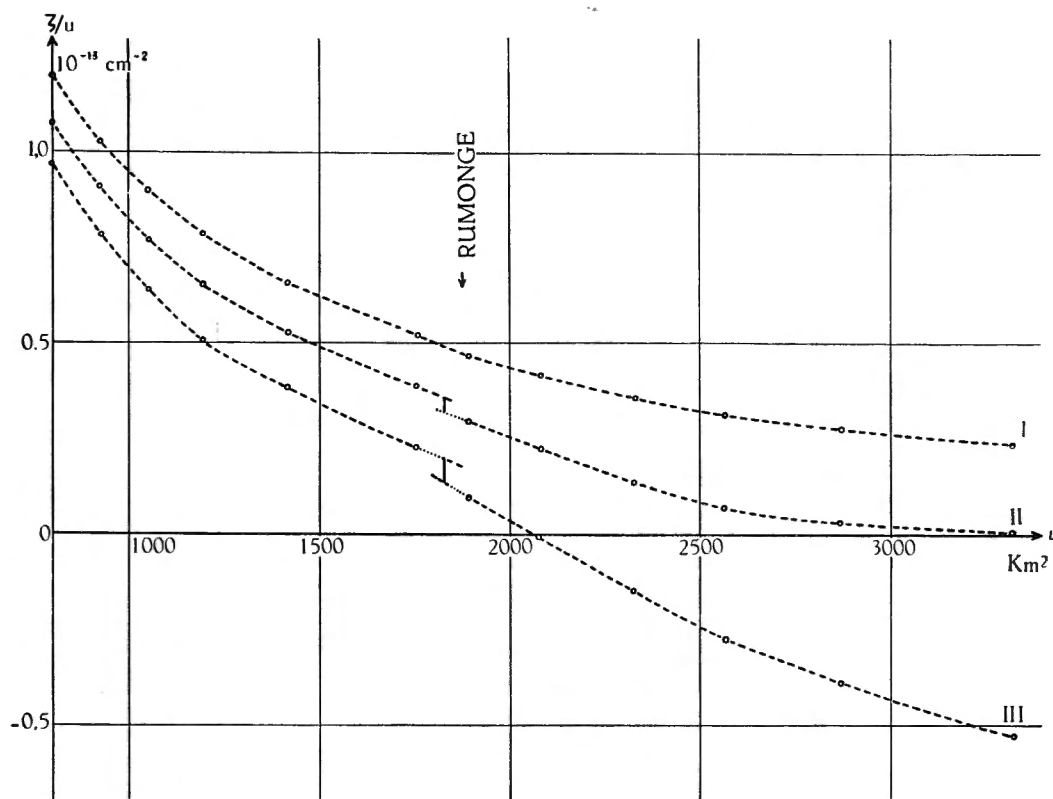


FIG. 22. — Lac Tanganika. Courbes d'impédance des trois premiers modes longitudinaux, dans la région de l'étranglement de Rumonge.

Usumbura jusqu'à l'étranglement Lubaya-Lubugwe, mais non comprise la baie de Burton, située « en dehors » du Talweg), et le bassin sud (c'est-à-dire toute la partie du lac située au sud de ce même étranglement), en les considérant chacun comme ouvert sur une masse d'eau infinie (ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus), on devra retrouver pour les deux modes fondamentaux des périodes et des profils pratiquement identiques à ceux du fondamental global, les écarts éventuels étant à attribuer au déplacement, de 2,7 km environ vers le nord, imposé au nœud. Ce calcul de vérification sera effectué plus loin (cf. pp. 161 sqq.).

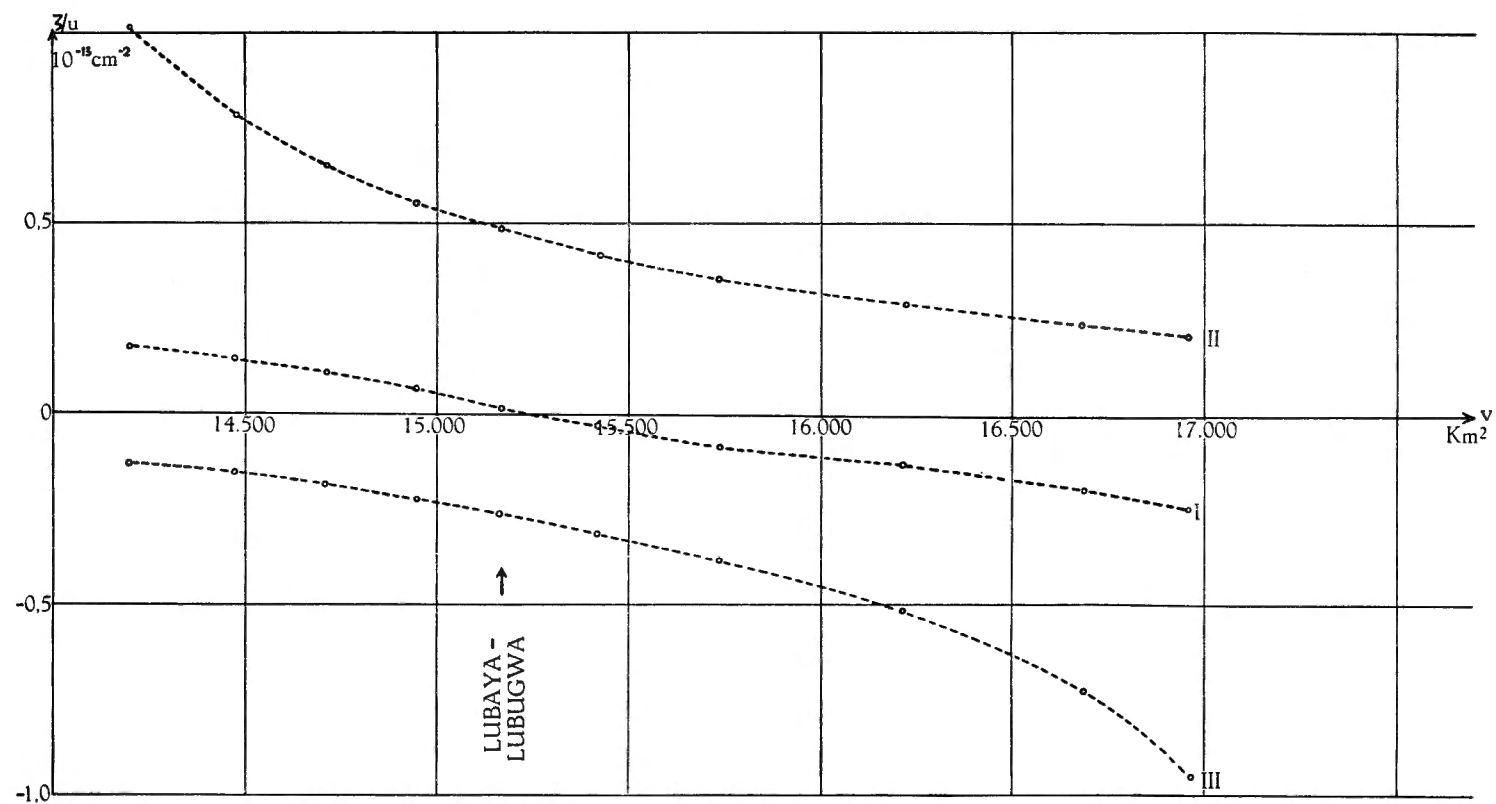


FIG. 23.

Lac Tanganika. Courbes d'impédance des trois premiers modes longitudinaux dans la région de l'étranglement Lubaya-Lubugwa.
 Pour la courbe du mode fondamental, les ordonnées ont été multipliées par dix.

Deuxième mode normal. — Etant donné que le rapport Z'_2/Z''_2 diffère peu de l'unité, il n'y a guère lieu de rechercher les modes normaux d'oscillation du lac amputé de son extrémité nord (« golfe » d'Uvira-Rumonge). En effet, les dénivellations ζ au ventre central et à l'extrémité sud (fermée) du lac n'étant respectivement que les $6/10$ et les $3/4$ environ de celle que l'on observerait au seuil de Rumonge (du moins pour le deuxième mode normal global, cf. fig. 20, p. 133), les seiches partielles du lac amputé de son extrémité nord seraient d'amplitude excessivement faible, et il paraît bien douteux qu'elles puissent être identifiées de manière claire sur un limnogramme.

Reste à considérer le troisième mode normal. — Si, par suite d'une réflexion de la seiche trinodale globale, une seiche trinodale partielle venait à s'établir dans le Tanganika, avec un nœud tout près de Rumonge, sa période et son profil ne différeraient guère de ceux de la trinodale globale qui vient d'être calculée au chapitre précédent.

Cette dernière remarque serait également applicable au mode fondamental (ventre unique à Uvira et Usumbura, nœud unique à Rumonge) du golfe d'Uvira-Rumonge, considéré comme bassin ouvert débouchant sur une masse d'eau infinie. A titre de vérification, ce dernier mode sera calculé dans un prochain paragraphe.

En conclusion, ni l'étranglement de Rumonge, ni celui de Lubaya-Lubugwe ne marque une discontinuité suffisante dans l'impédance des trois premiers modes normaux globaux pour donner lieu à une réelle séparation du Tanganika en deux ou plusieurs bassins quelque peu autonomes.

La question demeure cependant entière de savoir si pour d'éventuels modes supérieurs les trois bassins envisagés ci-dessus (p. 146), outre la baie de Burton, traitée à part en raison de sa situation, ne pourraient pas se comporter comme des masses d'eau autonomes.

Seules des observations effectuées avec précision sur tout le pourtour du lac et échelonnées sur une longue période de temps, pourront fournir la réponse à cette question. L'interprétation des futurs relevés limnographiques sera cependant grandement facilitée si l'on possède au préalable quelques résultats théoriques relatifs aux différents types de seiches qui ont des chances d'être observés; ce sont ces résultats que l'on a rassemblés dans le présent chapitre.

Malgré le peu de signification qu'ils peuvent avoir par eux-mêmes, on a également calculé ici les modes fondamentaux des bassins extrême-nord, nord et sud (tels qu'ils ont été délimités plus haut); l'intérêt de ces calculs est d'abord de permettre une vérification des résultats obtenus précédemment pour les seiches longitudinales globales, et surtout de fournir un moyen de contrôle des résultats qui concernent les modes normaux partiels supérieurs: la vérification de l'orthogonalité des fonctions propres entre elles.

Les calculs numériques sont conduits selon le schéma de la méthode de J. GOLDBERG (cf. pp. 59-60), les intégrations étant faites par trapèzes. On a ainsi, avec les notations habituelles :

$$\xi_v = \frac{u_v}{S_v}; \quad \Delta\zeta_{v+1} = \lambda\xi_v \Delta x_{v+1}; \quad \zeta_{v+1} = \zeta_v + \Delta\zeta_{v+1};$$

$$u_{v+1} = u_v - \frac{\zeta_v + \zeta_{v+1}}{2} \Delta v_{v+1} \equiv u_v + \Delta u_{v+1}.$$

u_0 est choisi arbitrairement; on lui attribue chaque fois une valeur qui fait prendre à ξ_0 la valeur de 100 m.

§ 2. CALCUL DES SEICHES LONGITUDINALES PARTIELLES PAR LA MÉTHODE DE J. GOLDBERG.

A. — « Golfe » d'Uvira-Rumonge (extrémité nord du lac). — Ce bassin, d'une superficie d'environ 1900 km², soit 6 % de la surface totale du Tanganika, et de faible profondeur moyenne (de l'ordre de 200 m) peut être considéré comme une sorte de baie annexe, débouchant à travers l'étranglement de Rumonge, sur une masse d'eau pratiquement infinie. Voici les calculs relatifs aux deux premiers modes. On a conservé les divisions utilisées précédemment (cf. table pp. 110 sqq.).

1. Mode fondamental. Valeur d'essai : $\lambda_1 = 1,023 \times 10^{-9}$ cm⁻¹.

Section	u	ξ	$\Delta\zeta$	ζ	$-\Delta u$
n°	10 ⁶ m ³	10 ² cm	cm	cm	10 ⁶ m ³
13	482,0000	100,000	5,1150	5,1150	3,5038
12	478,4962	58,567	6,5905	11,7055	28,4266
11	450,0696	62,250	6,3682	18,0737	33,5015
10	416,5681	73,339	3,7513	21,8250	27,9291
9	388,6390	74,595	3,8155	25,6405	30,1406
8	358,4984	65,780	3,3646	29,0051	33,6070
7	324,8914	65,635	3,3572	32,3623	34,3657
6	290,5257	68,359	3,4966	35,8589	36,1572
5	254,3685	69,122	3,5356	39,3945	40,2606
4	214,1079	62,605	3,2022	42,5967	48,7848
3	165,3231	49,947	2,5548	45,1515	52,2102
2	113,1129	34,911	1,7857	46,9372	58,9368
1	54,1761	23,054	1,2971	48,2343	54,2478
0	-0,0717	—	—	—	—

La valeur de λ_1 essayée est satisfaisante; on en tire : $T_1 = 6.282$ sec. = 1 h. 44 min. 42 sec.

2. Second mode. Valeur d'essai : $\lambda_2 = 6,905 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$.

Section n°	u 10^6 m^3	ξ 10^2 cm	$\Delta\zeta$ cm	ζ cm	$-\Delta u$ 10^6 cm^3
13	482,0000	100,000	34,5250	34,5250	23,6496
12	458,3504	56,102	42,6123	77,1373	188,7093
11	269,6411	37,295	25,7522	102,8895	202,5301
10	67,1110	11,815	4,0791	106,9686	146,9007
9	-79,7897	-15,315	-5,2875	101,6811	132,4926
8	-212,2823	-38,951	-13,4478	88,2333	116,7974
7	-329,0797	-66,481	-22,9526	65,2807	85,9678
6	-415,0475	-97,658	-33,7164	31,5643	52,3278
5	-466,3753	-126,732	-43,7542	-12,1899	10,3653
4	-476,7406	-139,398	-48,1272	-60,3171	-43,1417
3	-433,5989	-130,997	-45,2267	-105,5438	-98,6872
2	-334,9117	-103,368	-35,6878	-141,2316	-157,9363
1	-176,9755	-75,309	-28,6005	-169,8321	-117,3063
0	0,3308	—	—	—	—

Un essai précédent, effectué avec $\lambda_2 = 6,90 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, avait laissé un « résidu » u_0 égal à $-0,5469 \times 10^6 \text{ m}^3$. En interpolant linéairement, on obtient la valeur « améliorée » $\lambda_2 = 6,903 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, d'où $T_2 = 2.418 \text{ sec.} = 40 \text{ min. } 18 \text{ sec.}$

Comparons la période du fondamental partiel à celle du troisième mode global : $T_1 = 6.282 \text{ sec.} = 1 \text{ h. } 44 \text{ min. } 42 \text{ sec.}$, $T_3 = 6.414 \text{ sec.} = 1 \text{ h. } 46 \text{ min. } 54 \text{ sec.}$, soit un écart de 132 sec. ou 2 % seulement, dû naturellement au déplacement, de 7,5 km environ vers le nord, imposé au nœud. Par ailleurs, le rapport des deux périodes propres du bassin extrême-nord, $T_2/T_1 = 0,385$, montre que ce dernier se comporte plutôt comme un demi-bassin à fond parabolique ($T_2/T_1 = 0,4082$) que comme un demi-bassin à fond plan ($T_2/T_1 = 0,333$); ceci est conforme à ce que l'on pouvait attendre en examinant la courbe normale du lac dans la région en question.

3. Vérifions maintenant l'orthogonalité des fonctions propres $u_1(v)$ et $u_2(v)$.

Pour les huit intervalles égaux ($\Delta x = 5 \text{ km}$) de la 10^e à la 2^e section, on utilisera la règle de SIMPSON pour l'intégration; pour les trois premiers, on se contentera de rectangles, et le dernier sera traité comme un triangle. Il vient ainsi :

$$\int_0^l u_1 \xi_1 dx = 15.875,5394 \times 10^{11} \text{ m}^5;$$

$$\int_0^l u_2 \xi_2 dx = 20.319,8422 \times 10^{11} \text{ m}^5;$$

$$\int_0^l u_1 \xi_2 dx = -1.019,3296 \times 10^{11} \text{ m}^5;$$

$$\int_0^l u_2 \xi_1 dx = -1.019,3328 \times 10^{11} \text{ m}^5.$$

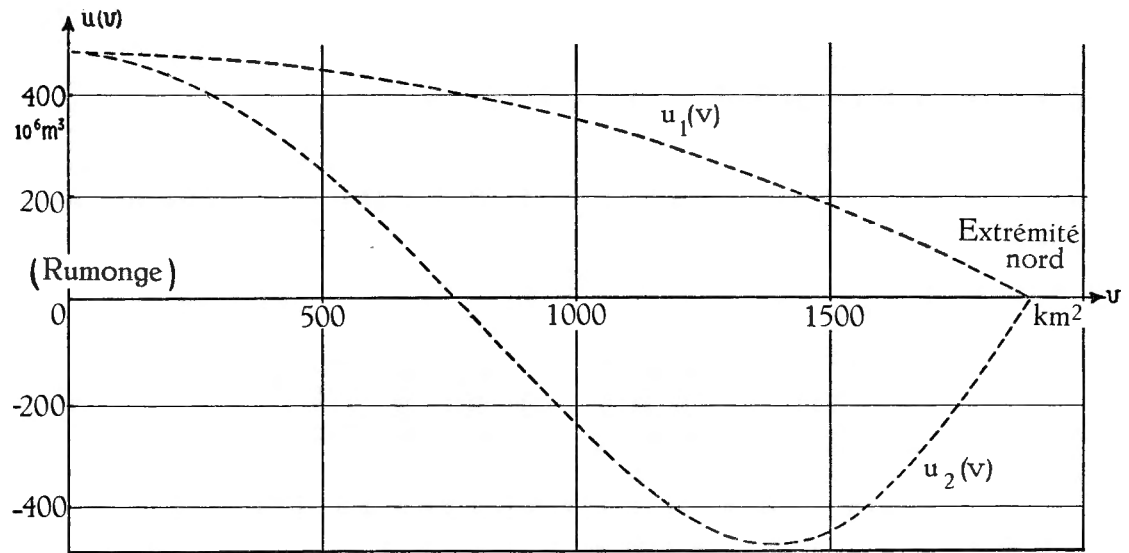


FIG. 24. — Lac Tanganika. Bassin extrême-nord (Usumbura-Rumonge).
Seiches longitudinales partielles. Fonctions propres des 1^{er} et 2^e modes normaux (méthode de GOLDBERG).

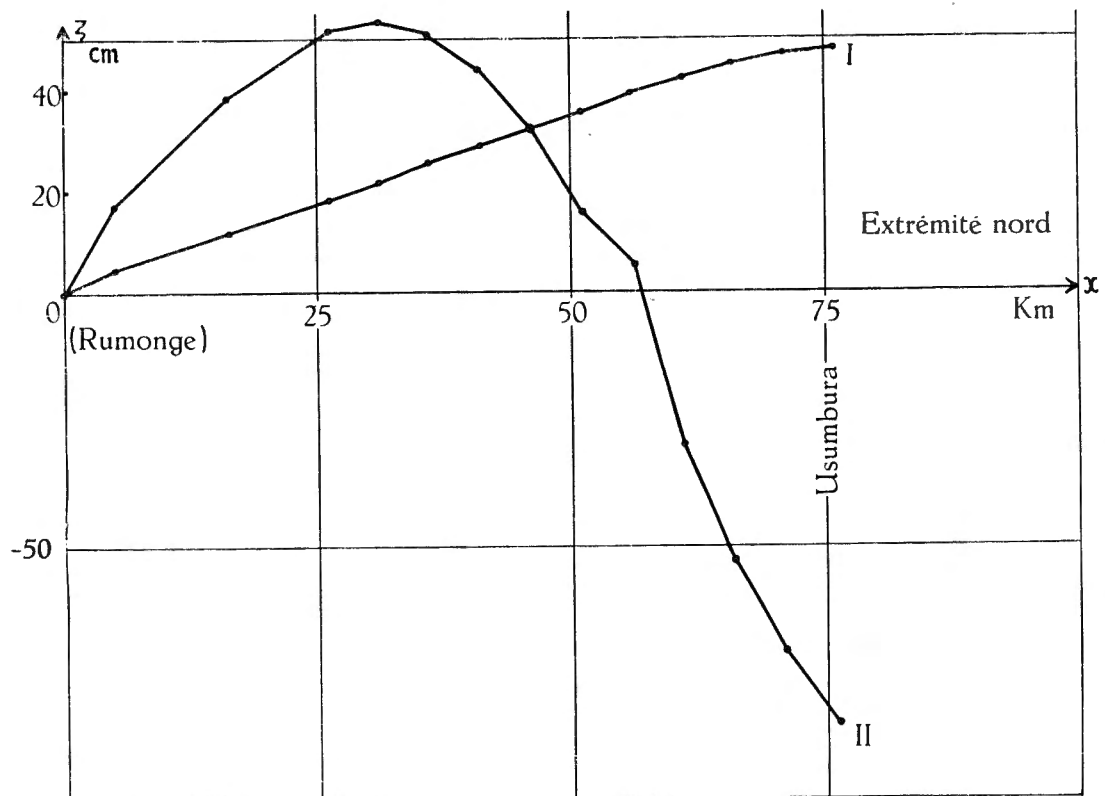


FIG. 25. — Lac Tanganika. Bassin extrême-nord (Usumbura-Rumonge).
Profil des seiches longitudinales partielles (modes I et II) (méthode de GOLDBERG).

La norme, égale au produit des racines carrées des deux premières intégrales, vaut $17.956,32 \times 10^{11} \text{ m}^5$; le quotient des deux dernières intégrales par cette quantité est $-0,057$, résultat fort satisfaisant compte tenu du nombre peu élevé de divisions utilisé.

Les graphiques (fig. 24-25) représentent les fonctions $u_1(v)$ et $u_2(v)$, ainsi que la distribution des amplitudes (profil) des seiches correspondantes. Malgré la différence des échelles employées, on pourra se rendre compte de la bonne concordance entre les fonctions $u(v)$ et $\zeta(x)$ obtenues pour le fondamental de ce bassin extrême-nord et ces mêmes fonctions obtenues au chapitre précédent pour le troisième mode global.

B. — Baie de Burton.

1. Voici d'abord une table des mesures bathymétriques et géographiques utilisées dans les calculs qui vont suivre. La baie a été divisée en 21 compartiments numérotés de 1 à 21, du nord au sud.

Section n°	Δx km	x km	$S(x)$ km ²	$b(x)$ km	$\sigma(x)$ 10 ¹⁰ m ³	Δv km ²	$v(x)$ km ²
nord (embouchure)							
0	0	0	3,237	16,6	5,373	0	0
1	1,5	1,5	3,120	15,4	4,805	23,8	23,8
2	1,5	3	2,306	14,8	3,413	23,9	47,7
3	1,5	4,5	2,129	13,8	2,938	21,5	69,2
4	1,5	6	1,846	13,8	2,547	21,3	90,5
5	1,5	7,5	1,659	13,6	2,256	15,9	106,4
6	1,5	9	1,598	12,4	1,981	16,0	122,4
7	1,5	10,5	1,235	12,4	1,531	18,9	141,3
8	1,5	12	1,032	12,0	1,238	18,9	160,2
9	1,5	13,5	0,935	12,2	1,141	16,8	177,0
10	1,5	15	0,811	11,2	0,908	16,9	193,9
11	1,4	16,4	0,635	10,2	0,648	16,1	210,0
12	1,5	17,9	0,495	9,6	0,475	16,2	226,2
13	1,6	19,5	0,404	8,6	0,347	12,3	238,5
14	1,5	21	0,345	8,5	0,293	12,3	250,8
15	1,5	22,5	0,367	8,8	0,323	12,8	263,6
16	1,5	24	0,357	9,6	0,343	12,8	276,4
17	1,5	25,5	0,413	9,8	0,405	15,3	291,7
18	1,5	27	0,467	11,4	0,352	15,3	307,0
19	1,5	28,5	0,405	12,2	0,494	16,3	323,3
20	1,5	30	0,212	13,2	0,280	16,4	339,7
21 (extrémité fermée)	2,7	32,7	0	0	0	32,7	372,4
sud							

Etant donné que la baie à étudier est large et relativement profonde à l'embouchure (sa profondeur décroît rapidement à mesure qu'on avance vers

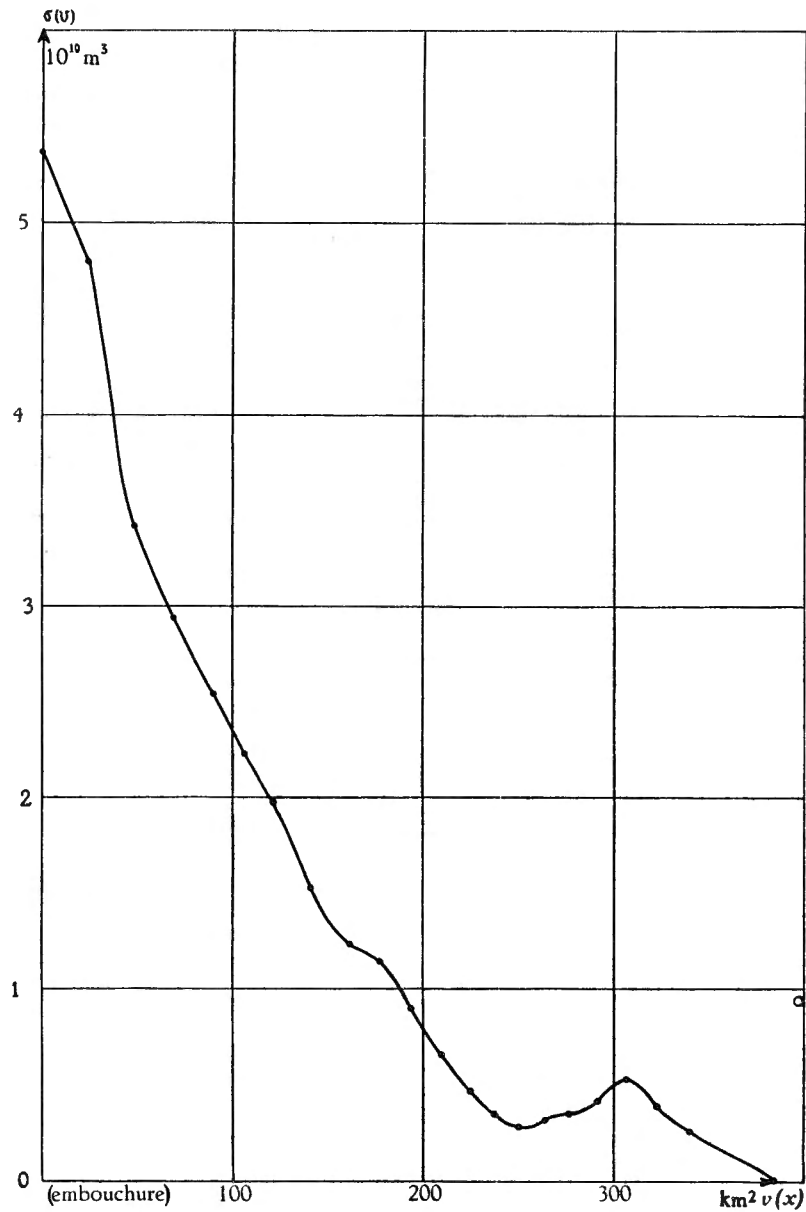


FIG. 26. — Baie de Burton (lac Tanganika). — Courbe normale.

son extrémité fermée — cf. planche II), on peut se contenter sans doute de prendre $\zeta=0$ à son embouchure; la correction d'embouchure (cf. pp. 83-85) paraît superflue; néanmoins, dans un paragraphe suivant, on appliquera, à titre de vérification, la méthode de K. HONDA à la recherche des seiches de la baie.

2. Mode fondamental — Valeur d'essai : $\lambda_1 = 2,170 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$.

Section n° n°	u 10^6 m^3	ξ 10^2 cm	$\Delta\zeta$ cm	ζ cm	$-\Delta u$ 10^6 m^3
0	323,700	100,000	3,255	3,255	0,387
1	323,313	103,626	3,373	6,628	1,181
2	322,132	139,693	4,547	11,175	1,914
3	320,218	150,408	4,896	16,071	2,902
4	317,316	171,894	5,595	21,666	3,000
5	314,316	189,461	6,167	27,833	3,960
6	310,356	194,215	6,322	34,155	5,858
7	304,498	246,557	8,025	42,180	7,214
8	297,284	288,066	9,377	51,557	7,874
9	289,410	309,529	10,075	61,632	9,564
10	279,846	345,063	11,232	72,864	10,827
11	269,019	423,652	12,871	85,735	12,847
12	256,172	517,519	16,845	102,580	11,581
13	244,591	605,423	21,020	123,600	13,910
14	230,681	668,641	21,764	145,364	17,214
15	213,467	581,653	18,940	164,304	19,819
16	193,648	542,431	17,656	181,960	26,489
17	167,159	404,743	13,174	195,134	28,848
18	138,311	296,169	9,640	204,774	32,592
19	105,719	261,035	8,497	213,271	34,280
20	71,439	336,976	10,969	224,240	71,533
21	-0,094	—	—	—	—

Un essai précédent, effectué avec $\lambda_1 = 2,176 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, avait laissé un « résidu » $u_{21} = -0,720 \times 10^6 \text{ m}^3$. Par extrapolation linéaire, on trouve ainsi la valeur « améliorée » $\lambda_1 = 2,169 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, d'où $T_1 = 4.314 \text{ sec.} = 1 \text{ h. } 11 \text{ min. } 54 \text{ sec.}$

3. Second mode. — Valeur d'essai : $\lambda_2 = 15,045 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$.

Section n° n°	u 10^6 m^3	ξ 10^2 cm	$\Delta\zeta$ cm	ζ cm	$-\Delta u$ 10^6 m^3
0	323,700	100,000	22,567	22,567	2,685
1	321,015	102,889	23,219	45,786	8,168
2	312,847	135,666	30,616	76,402	13,135
3	299,712	140,776	31,770	108,172	19,657
4	280,055	151,709	34,237	142,409	19,921
5	260,134	156,802	35,386	177,795	25,616
6	234,518	146,757	33,119	210,914	36,733
7	197,785	160,150	36,142	247,056	43,278
8	154,507	149,716	33,787	280,843	44,344
9	110,163	117,821	26,589	307,432	49,709

Section n°	u 10^6 m^3	ξ 10^3 cm	$\Delta\zeta$ cm	ζ cm	$-\Delta u$ 10^6 m^3
10	60,454	74,542	16,822	324,254	50,851
11	9,603	15,123	3,185	327,439	52,787
	Ventre				
12	-43,184	-87,240	-19,688	307,751	39,064
13	-82,248	-203,584	-49,007	258,744	34,839
14	-117,087	-339,383	-76,590	182,154	28,217
15	-145,304	-395,924	-89,350	92,804	17,597
	Nœud				
16	-162,901	-456,305	-102,976	-10,001	6,348
17	-169,249	-409,804	-92,483	-102,484	-8,605
18	-160,644	-343,991	-77,630	-180,114	-23,032
19	-137,612	-339,783	-76,681	-256,795	-35,827
20	-101,785	-480,118	-108,351	-365,146	-101,687
21	-0,098	—	—	—	—

Un essai précédent, effectué avec $\lambda_2 = 15,036 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, avait laissé un « résidu » u_{21} égal à $-0,39 \times 10^6 \text{ m}^3$. On en tire, par extrapolation linéaire, la valeur « améliorée » : $\lambda_2 = 15,048 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, d'où $T_2 = 1.638 \text{ sec.} = 27 \text{ min.} 18 \text{ sec.}$

4. Vérifions immédiatement l'orthogonalité des fonctions propres $u_1(v)$ et $u_2(v)$.

Comme tous les Δx sont égaux (en prenant égaux à 1,5 km les Δx des 11° et 13° sections), sauf le dernier (= 2,7 km), l'application de la règle de SIMPSON devient possible, et l'on trouve (en traitant le dernier compartiment à part, comme un triangle) :

$$\int_0^l u_1 \xi_1 dx = 2.356,817 \times 10^{12} \text{ m}^5;$$

$$\int_0^l u_2 \xi_2 dx = 1.034,507 \times 10^{12} \text{ m}^5;$$

$$\int_0^l u_1 \xi_2 dx = \int_0^l u_2 \xi_1 dx = -16,730 \times 10^{12} \text{ m}^5.$$

La norme est égale à $1.561,455 \times 10^{12} \text{ m}^5$, et le quotient des deux dernières intégrales par cette quantité est de $-0,01071$ (nombre pur), résultat qui indique une orthogonalité fort satisfaisante.

5. Les graphiques qui suivent représentent les fonctions $u_1(v)$ et $u_2(v)$, ainsi que la distribution des amplitudes (« profils ») des seiches correspondantes.

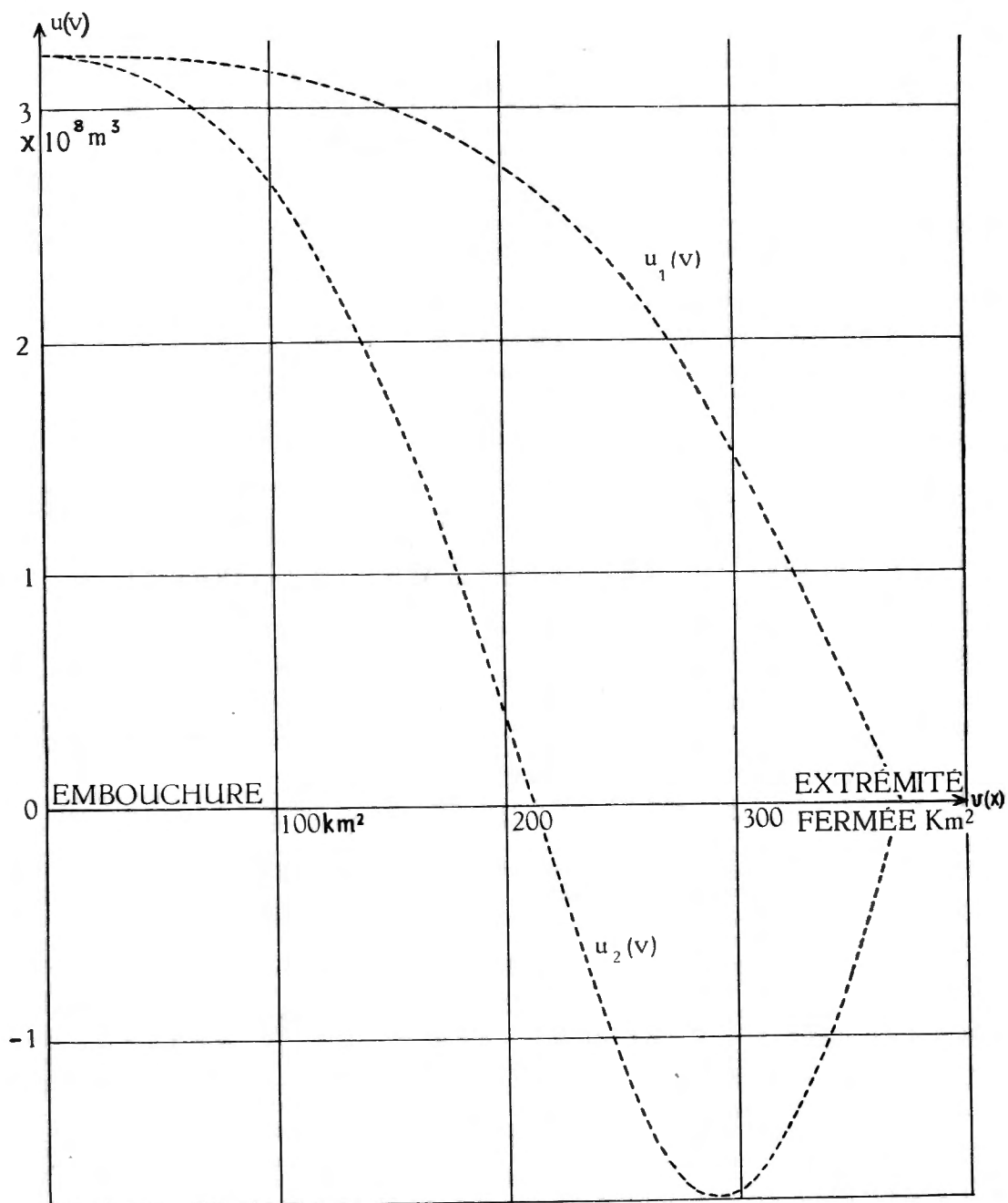


FIG. 27. — Baie de Burton (lac Tanganika).

Fonctions propres des 1^{er} et 2^e modes normaux longitudinaux (méthode de GOLDBERG).

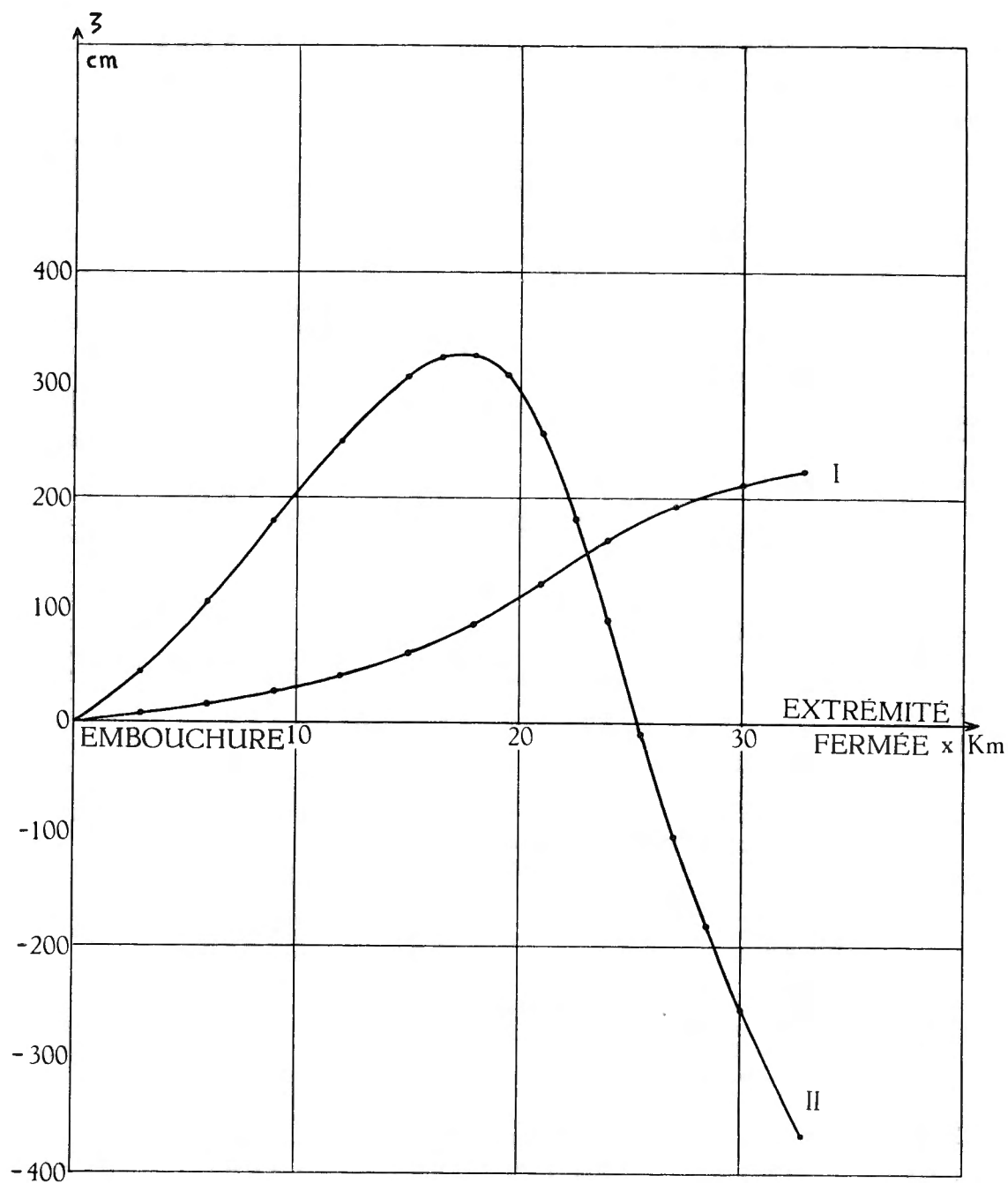


FIG. 28. — Baie de Burton. Profil des seiches longitudinales (méthode de GOLDBERG).

On voit que les dénivellations ζ sont surtout importantes près de l'extrémité fermée de la baie, comme on pouvait du reste s'y attendre à la simple inspection de la courbe normale.

Pour le second mode, le second nœud est situé au voisinage du km 25, soit à près des quatre cinquièmes de la longueur totale (32,7 km) de la baie depuis son embouchure. Ceci semble bien justifier l'approximation adoptée quant à la position du premier nœud, à l'embouchure même et non en-deçà.

L'écart considérable entre la période du fondamental et du second mode semble indiquer que les modes supérieurs seront probablement trop rapides pour être « stables » (cf. p. 13), et pour ce motif il est sans doute sans grand intérêt de les calculer.

C. — Bassin nord (y compris le « golfe » d'Uvira-Rumonge, mais sans la baie de Burton). — Ainsi qu'il a été dit plus haut (p. 146), le bassin nord, qui occupe près de la moitié du lac, peut être considéré comme débouchant, à travers l'étranglement Lubaya-Lubugwe, sur un océan infini. On prendra donc $\zeta=0$ à l'embouchure.

Afin d'abréger, on ne donnera plus ici le détail des résultats numériques. Les graphiques suffiront à donner une idée des phénomènes.

1. Mode fondamental. — Un essai effectué avec $\lambda_1=1,687 \times 10^{-10}$ cm⁻¹, laisse un « résidu » $u_0=0,1589 \times 10^7$ m³.

Avec $\lambda_1=1,683 \times 10^{-10}$ cm⁻¹, ce résidu est $u_0=0,4678 \times 10^7$ m³. En extrapolant linéairement, on obtient ainsi la valeur « améliorée » $\lambda_1=1,689 \times 10^{-10}$ cm⁻¹, d'où $T_1 = 15.459$ sec. = 4 h. 17 min. 39 sec.

2. Second mode. — Un essai effectué avec $\lambda_2=7,50 \times 10^{-10}$ cm⁻¹, laisse un « résidu » $u_0 = -0,2251 \times 10^7$ m³.

L'essai précédent ($\lambda_2=8,5 \times 10^{-10}$ cm⁻¹) ayant laissé $u_0=37,6266 \times 10^7$ m³ comme « résidu », l'interpolation linéaire n'est guère praticable.

On prendra donc comme période celle correspondant à $\lambda_2=7,50 \times 10^{-10}$ cm⁻¹, à savoir $T_2 = 7.336$ sec. = 2 h. 2 min. 16 sec.

Comparons la période du fondamental du bassin nord à celle du fondamental global : elles valent respectivement 15.459 sec. = 4 h. 17 min. 39 sec. et 15.346 sec. = 4 h. 15 min. 46 sec.; l'écart est inférieur à deux minutes, soit environ 0,74 %, et est dû au léger déplacement, de 2,7 km vers le nord, imposé au nœud. Quant à la période du second mode, elle diffère notablement (plus de 14 % par excès) de celle du troisième mode global.

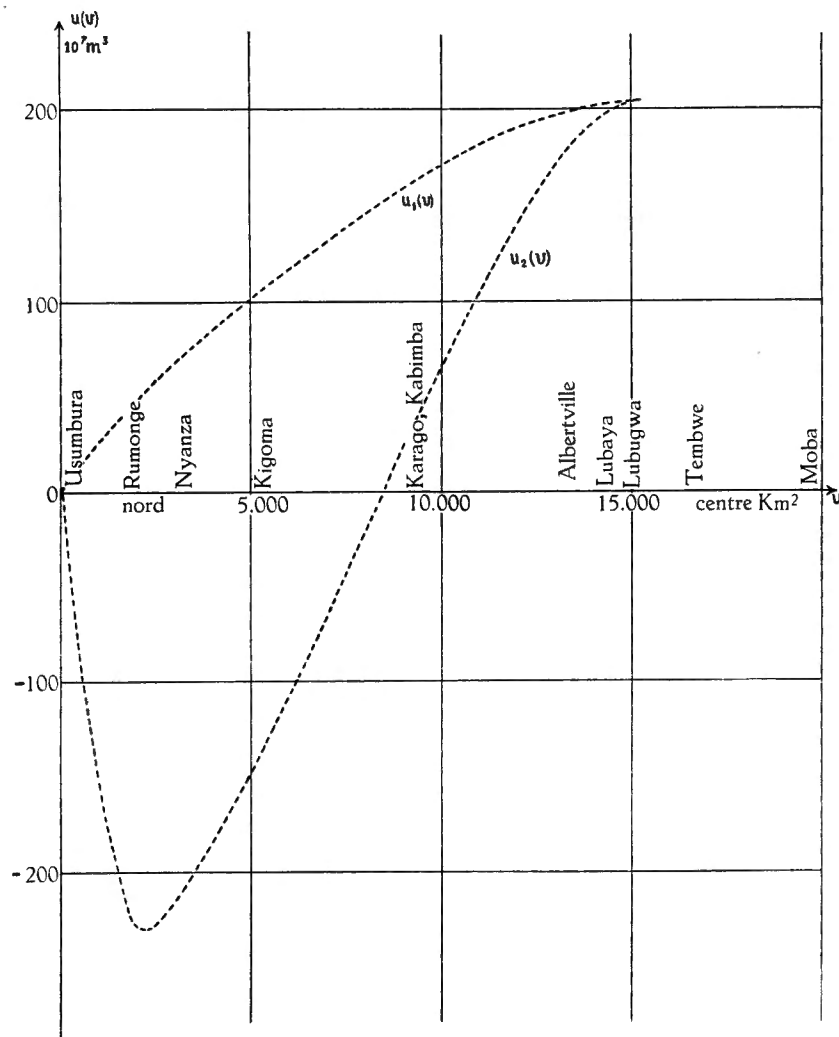


FIG. 29. — Lac Tanganika. Moitié nord.
Fonctions propres des 1^{er} et 2^e modes normaux longitudinaux partiels
(méthode de GOLDBERG).

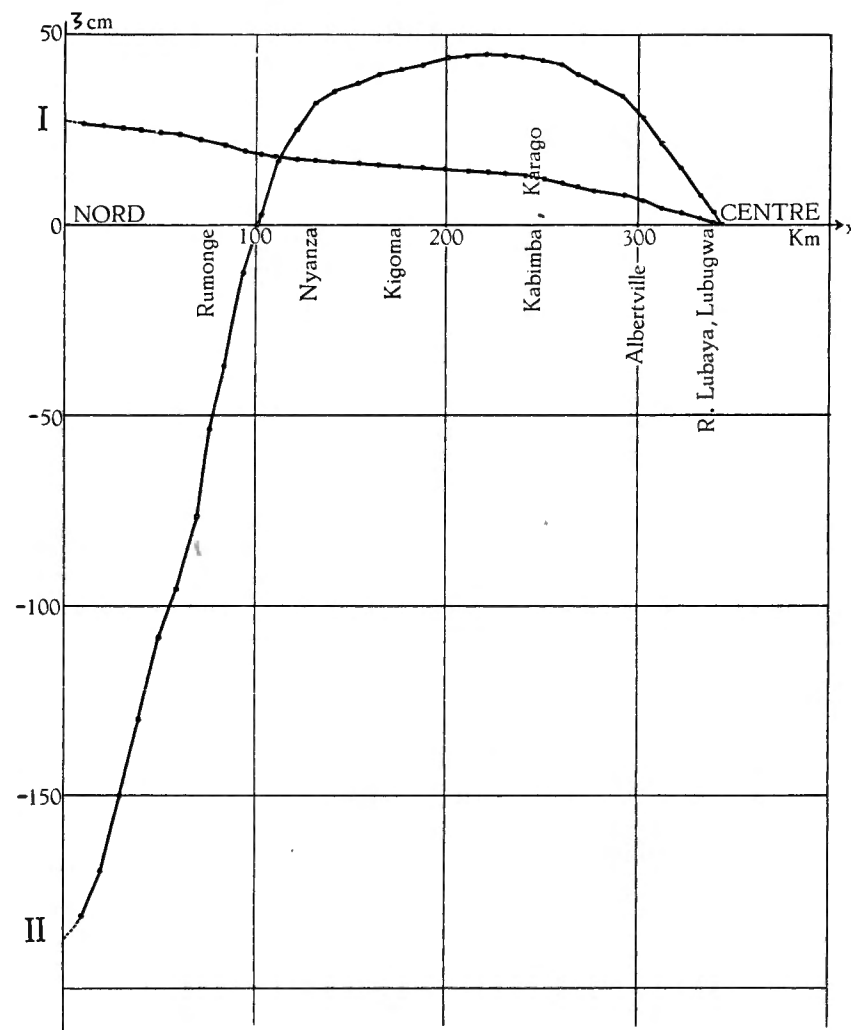


FIG. 30. — Lac Tanganika. Moitié nord.
Profil des seiches longitudinales partielles (modes I et II)
(méthode de GOLDBERG).

3. Vérifions l'orthogonalité des fonctions $u_1(v)$ et $u_2(v)$.

On trouve par la règle des rectangles (le nombre de sections étant suffisamment élevé) :

$$\begin{aligned}\int_0^l u_1 \xi_1 dx &= 20.079,2529 \times 10^{12} \text{ m}^5; \\ \int_0^l u_2 \xi_2 dx &= 63.982,0681 \times 10^{12} \text{ m}^5; \\ \int_0^l u_1 \xi_2 dx &= -964,6685 \times 10^{12} \text{ m}^5; \\ \int_0^l u_2 \xi_1 dx &= -964,6685 \times 10^{12} \text{ m}^5.\end{aligned}$$

En divisant les deux dernières intégrales par la norme, égale à $35.842,8762 \times 10^{12} \text{ m}^5$, on obtient un quotient de $-0,0269$, résultat qui indique une orthogonalité satisfaisante.

Les figures 29 et 30 représentent les fonctions $u_1(v)$ et $u_2(v)$, ainsi que la distribution des amplitudes (profil) des seiches correspondantes. La concordance entre les fonctions $u_1(v)$ et $\zeta(x)$ du bassin nord et ces mêmes fonctions pour le fondamental global est entièrement satisfaisante. Quant à la binodale du bassin nord, elle affecte, tout comme la trinodale globale, surtout l'extrémité nord du lac, relativement peu profonde.

D. Bassin sud. — Tout comme pour le bassin nord, considérons que le bassin sud débouche à travers l'étranglement Lubaya-Lubugwe, sur une masse d'eau infinie. On aura donc $\zeta=0$ à l'embouchure.

Voici les résultats des calculs.

1. Mode fondamental. — Un essai effectué avec $\lambda_1 = 1,638 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, laisse un « résidu » de $u_0 = 0,0914 \times 10^7 \text{ m}^3$.

Un essai précédent effectué avec $\lambda_1 = 1,68 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, ayant laissé un « résidu » beaucoup plus grand ($u_{89} = -3,8105 \times 10^7 \text{ m}^3$), l'interpolation linéaire n'est guère praticable. On adoptera donc comme valeur « exacte » $\lambda_1 = 1,638 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, d'où $T_1 = 15.698 \text{ sec.} = 4 \text{ h. } 21 \text{ min. } 38 \text{ sec.}$

2. Second mode. — « Résidu » avec $\lambda_2 = 12,868 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$: $u_0 = -0,0816 \times 10^7 \text{ m}^3$.

Un essai précédent avec $\lambda_2 = 12,90 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$ avait laissé un « résidu » $u_{89} = 0,9265 \times 10^7 \text{ m}^3$; en interpolant linéairement, on obtient la valeur « améliorée » $\lambda_2 = 12,8706 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$, d'où $T_2 = 5.600,3 \text{ sec.}$ ou $1 \text{ h. } 33 \text{ min. } 20 \text{ sec.}$

Comparons la période du fondamental du bassin sud à celle du fondamental global; elles valent respectivement $15.698 \text{ sec.} = 4 \text{ h. } 21 \text{ min. } 38 \text{ sec.}$ et 15.346 sec.

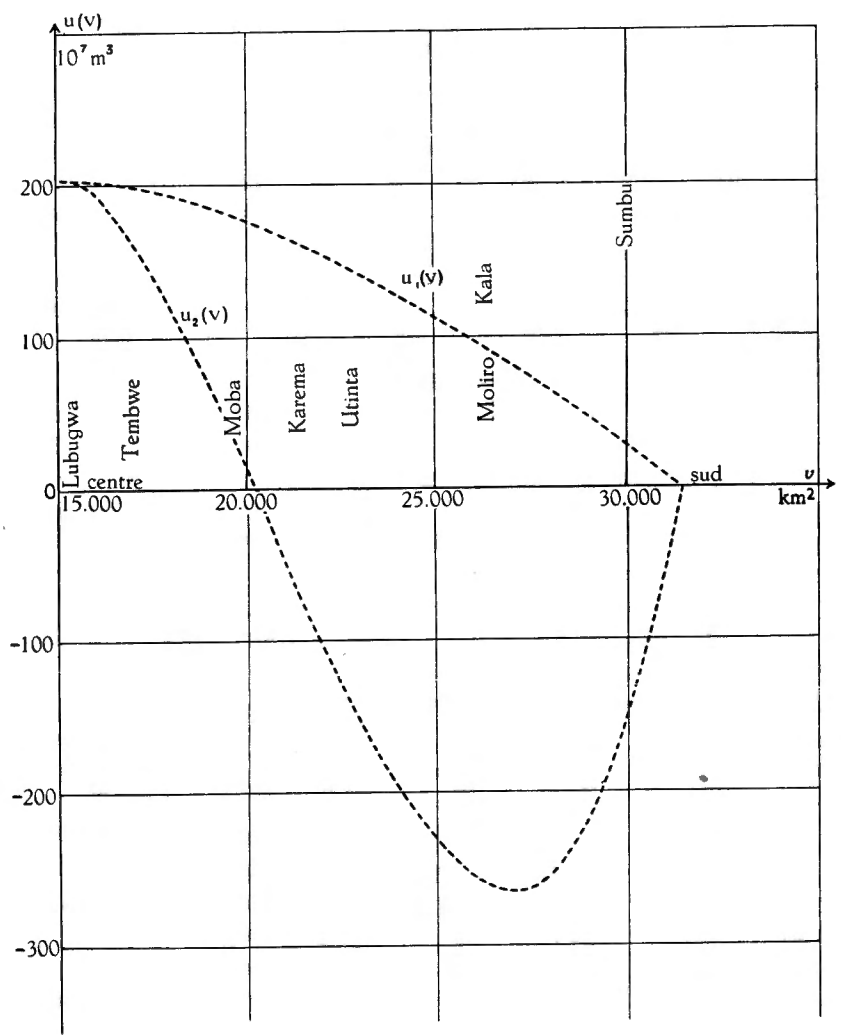


FIG. 31. — Lac Tanganika. Moitié sud.
Fonctions propres des 1^{er} et 2^e modes normaux longitudinaux partiels
(méthode de GOLDBERG).

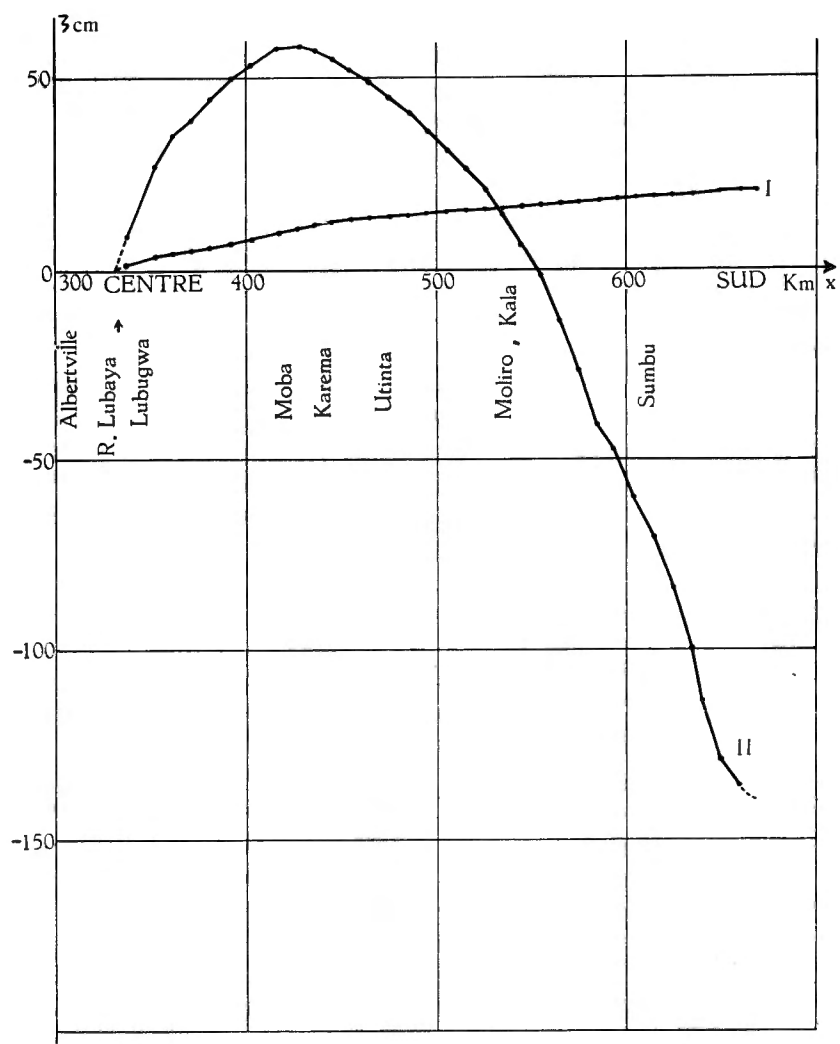


FIG. 32. — Lac Tanganika. Moitié sud.
Profil des seiches longitudinales partielles (modes I et II)
(méthode de GOLDBERG).

= 4 h. 15 min. 46 sec.; l'écart est voisin de 6 minutes, soit environ 2,3 %. Quant à la période du second mode, elle diffère de près de 13 % par défaut de celle de la seiche trinodale globale.

3. Vérifions l'orthogonalité des fonctions $u_1(v)$ et $u_2(v)$.

On trouve par la règle des rectangles (le nombre de divisions étant suffisamment élevé) :

$$\begin{aligned}\int_0^l u_1 \xi_1 dx &= 18.606,8943 \times 10^{12} \text{ m}^5; \\ \int_0^l u_2 \xi_2 dx &= 35.326,8101 \times 10^{12} \text{ m}^5; \\ \int_0^l u_1 \xi_2 dx &= - 610,2218 \times 10^{12} \text{ m}^5; \\ \int_0^l u_2 \xi_1 dx &= - 610,2218 \times 10^{12} \text{ m}^5.\end{aligned}$$

En divisant les deux dernières intégrales par la norme, égale à 25.638,3001 $\times 10^{12}$ m⁵, on obtient un quotient de -0,0238, résultat qui indique une orthogonalité satisfaisante.

Les figures 31 et 32 représentent les fonctions propres $u_1(v)$ et $u_2(v)$, ainsi que la distribution des amplitudes (profils) des seiches correspondantes. La concordance entre les fonctions $u_1(v)$ et $\zeta(x)$ du bassin sud et ces mêmes fonctions pour le fondamental global est entièrement satisfaisante. Quant à la binodale du bassin sud, elle affecte surtout l'extrémité sud du lac, beaucoup moins profonde que la région centrale.

§ 3. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE K. HONDA AUX SEICHES DE LA BAIE DE BURTON.

La baie de Burton ayant une forme sensiblement rectangulaire et une profondeur assez peu variable, il est intéressant d'en calculer les périodes d'oscillation à l'aide de la méthode de correction de K. HONDA et de confronter les résultats ainsi obtenus avec ceux trouvés par la méthode de J. GOLDBERG, d'autant plus que cette baie est la seule portion du Tanganika qui soit assez régulière quant à sa forme et à sa section droite pour qu'on puisse lui appliquer le procédé en question.

Assimilons d'abord la baie de Burton à un canal de longueur l , ouvert à une extrémité, de profondeur h_0 et de largeur b_0 uniformes. On trouve ainsi, par la formule de

$$\text{MERIAN : } T_\kappa = \frac{4l}{k\sqrt{gh_0}}, \text{ en prenant } l = 32,7 \text{ km, } h_0 = 80 \text{ m :}$$

$$T_1 = 4.676 \text{ sec.} = 1 \text{ h. } 17 \text{ min. } 58 \text{ sec.}$$

$$T_2 = 2.338 \text{ sec.} = 38 \text{ min. } 58 \text{ sec.}$$

a) Calcul du facteur de correction d'embouchure.

Ce facteur est égal à :

$$\left(1 + \frac{4P b_0}{l}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{avec} \quad P = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 0,5772 - \text{Log} \frac{\pi b_0}{4l}\right).$$

Comme $b_0 = 11,4$ km, on trouve que le facteur cherché vaut 1,222.

b) Calcul du facteur de correction pour l'irrégularité de la section droite. Ce facteur, qui est fonction du nombre k de nœuds de la seiche (y compris le nœud à l'embouchure) s'écrit (cf. formule II.14, p. 87) :

$$1 + \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{\Delta S(x)}{lS_0} + \frac{\Delta b(x)}{lb_0} \right] \cos \frac{2k\pi x}{l} dx.$$

En employant des intervalles constants ($\Delta x = 3$ km), on peut dresser, pour $k = 1$ la table suivante (même numérotation que page 155); on a pris $b_0 = 11,4$ km et $S_0 = 0,912$ km².

Section n°	Δx km	x km	$\cos \frac{2\pi x}{l}$	$\Delta b(x)$ km	$\Delta S(x)$ km ²
0	—	—	1,000	5,2	2,325
2	3	3	0,839	3,4	1,394
4	3	6	0,407	2,4	0,934
6	3	9	-0,156	1,0	0,686
8	3	12	-0,670	0,6	0,124
10	3	15	-0,966	-0,2	-0,101
12	3	18	-0,956	-1,8	-0,417
14	3	21	-0,626	-2,9	-0,562
16	3	24	-0,101	-1,8	-0,555
18	3	27	0,458	0	-0,445
20	3	30	0,868	1,8	-0,689
21	2,7	32,7	—	—	—

En calculant par la règle de SIMPSON les intégrales

$$\int_0^l \Delta b(x) \cos \frac{2\pi x}{l} dx \quad \text{et} \quad \int_0^l \Delta S(x) \cos \frac{2\pi x}{l} dx,$$

on trouve respectivement : $30,539 \times 10^6$ m² et $9,075 \times 10^6$ m³.

Comme $2lb_0 = 745,56 \times 10^6$ m² et $2lS_0 = 59,644,8 \times 10^6$ m³, le facteur de correction cherché peut s'écrire :

$$1 + \frac{30,539}{745,56} + \frac{9,075}{59,644,8} = 1 + 0,04096 + 0,15215 \simeq 1,1931.$$

c) La comparaison avec le résultat obtenu par la méthode de GOLDBERG se fera en ne faisant usage que du facteur de correction pour la forme irrégulière : on obtient ainsi : $T_1 = 4.676 \text{ sec} \times 1,1931 = 5.578 \text{ sec} = 1 \text{ h } 32 \text{ min } 58 \text{ sec}$. Le résultat fourni par la méthode de GOLDBERG était $T_1 = 4.314 \text{ sec} = 1 \text{ h } 11 \text{ min } 54 \text{ sec}$. L'écart est donc de 29,3 % environ.

Cet écart, à première vue énorme, semble être de règle, en quelque sorte : P. CALOI et ses élèves, dans leurs études sur les lacs italiens (cf. pp. 88-89) rencontrent régulièrement des écarts de 30 à 50 % entre les résultats obtenus par ces deux méthodes.

Quant à la correction d'embouchure, si l'on veut en faire usage, il faudra également l'appliquer aux résultats obtenus par la méthode de GOLDBERG; on trouve ainsi pour ces derniers :

$$\begin{aligned} T_1 &= 5.272 \text{ sec} = 1 \text{ h. } 27 \text{ min. } 52 \text{ sec,} \\ T_2 &= 2.002 \text{ sec} = 33 \text{ min. } 22 \text{ sec;} \end{aligned}$$

alors que la méthode de HONDA donne :

$$T_1 = 6.290 \text{ sec} = 1 \text{ h. } 44 \text{ min. } 50 \text{ sec.}$$
