

DEUXIÈME PARTIE

Les seiches transversales.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

§ 1. EXTENSION À DEUX DIMENSIONS DE L'ÉQUATION DE CHRYS TAL.

La théorie de CHRYS TAL, qui traite le problème des seiches longitudinales dans un lac-canal comme un problème à une seule dimension horizontale, ne peut pas, de ce fait, tenir compte de la forme de la section droite (supposée en toute généralité variable le long du Talweg) : seule intervient l'aire de cette section droite, ainsi qu'il ressort de l'équation obtenue par CHRYS TAL :

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0. \quad (\text{I.10})$$

La dénivellation ζ est donc supposée avoir la même valeur le long des lignes $v = v_i$ (const.), perpendiculaires au Talweg et orthogonales aux rives opposées, et cela d'une rive à l'autre. Si l'on veut étudier le rôle de la forme de cette section droite, négligé par la théorie de CHRYS TAL, il est nécessaire de traiter le problème à deux dimensions horizontales : ζ sera dans ce cas fonction de deux variables horizontales : l'une, x , longitudinale, l'autre, y , transversale — ce qui permet en principe d'envisager en outre l'apparition d'un mouvement oscillatoire transversal.

On peut aisément étendre à deux dimensions l'équation de CHRYS TAL. Au lieu d'une tranche liquide, considérons maintenant une colonne dont la base a pour longueur et largeur dx et dy , et dont la hauteur (égale à la profondeur du bassin) sera en général fonction de x et de y : $h = h(x, y)$.

L'équation de continuité s'obtient en écrivant que le volume de la colonne

se conserve au cours d'un déplacement (ξ, η) ; on a donc (comme précédemment, cf. pp. 14 sqq.) :

$$h(x, y) dx dy = [h(x + \xi, y + \eta) + \zeta] \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx \cdot \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dy,$$

d'où

$$\zeta = \frac{h(x, y)}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \cdot \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)} - h(x + \xi, y + \eta),$$

ou

$$\zeta = h(x, y) \cdot \left[1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} + \dots\right] - h(x, y) - \xi \frac{\partial h}{\partial x} - \eta \frac{\partial h}{\partial y} - \dots$$

(en négligeant les termes supérieurs du développement de McLaurin, $h(x, y)$ étant supposé « peu variable » avec x et y), ou encore :

$$\zeta = -\frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) \cdot \xi] - \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) \cdot \eta].$$

Posons enfin $h(x, y) \cdot (\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \Phi$ (vecteur surface balayée par la colonne de base infiniment petite $dx dy$, au cours de son déplacement); il vient :

$$\zeta = -\operatorname{div} \Phi. \quad (\text{VI.1})$$

Pour l'équation du mouvement on a, séparément ⁽⁹¹⁾

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

ou, puisque le mouvement est périodique,

$$\omega^2 \xi = g \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad \omega^2 \eta = g \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

Multiplions encore ces deux équations par $h(x, y)$; il vient ainsi (en posant comme d'habitude $\omega^2/g = \lambda$) :

$$\lambda \Phi = h(x, y) \cdot \operatorname{grad} \zeta. \quad (\text{VI.2})$$

Éliminant ξ ou Φ entre (VI.1) et (VI.2), il vient respectivement

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \Phi + \frac{\lambda \Phi}{h(x, y)} = 0 \quad (\text{VI.3})$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] + \lambda \zeta = 0. \quad (\text{VI.4})$$

Reste à fixer les conditions-frontière.

⁽⁹¹⁾ Cf. LAMB, H., *Hydrodynamics*, (1945), p. 282.

Si le lac est bordé de toutes parts par des parois verticales, on devra avoir, tout le long de son contour, $\Phi = 0$ (pour équation VI.3) et $\partial\zeta/\partial n = 0$ (pour l'équation VI.4). Si au contraire le lac présente des côtes en pente inclinée, on aura la condition :

$$(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \cdot \frac{\partial h}{\partial n} + \zeta(x, y) = 0.$$

§ 2. ÉTUDE DE QUELQUES LACS DE LARGEUR CONSTANTE ET DE PROFONDEUR VARIABLE.

Sous cette forme très simple, le problème a été posé par K. HIDAOKA, qui y consacre trois articles assez brefs ⁽⁹²⁾. Voici l'essentiel des résultats obtenus par cet auteur. Nous modifions quelque peu ses notations.

a) Lac de profondeur variable en x seulement : $h(x, y) = h_0(1 - x^2/a^2)$ (origine de l'axe Ox au milieu du bassin), et de largeur b_0 (ce qui entraîne $-b_0/2 \leq y \leq b_0/2$), en écrivant b_0 au lieu de $2b_0$, afin d'éviter un désaccord avec nos propres notations aux §§ 3-4.

L'équation (VI.4) devient dans ce cas :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{h_0} \zeta = 0, \quad (\text{VI.5})$$

et les conditions-frontière s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{y=\pm b_0/2} = 0; \quad 2h_0 \xi(a) - a\zeta(a) = 0; \quad 2h_0 \xi(-a) + a\zeta(-a) = 0.$$

Prenons, pour résoudre l'équation (VI.5), des solutions

$$\zeta = \cos \frac{p \pi y}{b_0} \cdot w(x), \quad (p \text{ entier pair})$$

$$\zeta = \sin \frac{q \pi y}{b_0} \cdot w(x), \quad (q \text{ entier impair}).$$

⁽⁹²⁾ Cf. HIDAOKA, K., *Tidal Oscillations in a Rectangular Basin of Variable Depth*, Mem. Imp. Mar. Obs., V, 1 (1932), pp. 15-23; VI, 3 (1937), pp. 259-277; Geophys. Mag., 5 (1932), pp. 265-271.

Le cas du bassin de profondeur constante (problème des seiches à deux dimensions) a été traité en détail par H. LAMB, *op. cit.*, p. 284; il trouve $\zeta = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)$ (a, b dimensions du bassin selon Ox, Oy respectivement) et $\omega^2/g h_0 = \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)$, résultat classique bien connu.

Introduisons-les dans (VI.5); il vient, en écrivant r pour p et q :

$$\frac{d}{dx'} \left[(1 - x'^2) \frac{dw}{dx'} \right] + \left[\frac{\beta_r^2 - 1}{\alpha_r^2} + \frac{x'^2}{\alpha_r^2} \right] w(x') = 0, \quad |x'| < 1$$

où l'on a posé

$$x/a = x'; \quad b_0/r\pi a = \alpha_r; \quad \alpha_r \omega a / \sqrt{gh_0} = \beta_r.$$

Supposons que $w(x)$ puisse se mettre sous la forme

$$w(x') = \sum_{i=0}^{\infty} A_i P_i(x'),$$

où les A_i sont des constantes et les $P_i(x')$ des polynômes de LEGENDRE; on obtient alors, en introduisant ce développement de $w(x')$ dans l'équation ci-dessus, des relations de récurrence entre trois coefficients A_i de même parité, dont on déduit les équations aux valeurs propres du problème. Les solutions se répartissent en deux classes, symétrique et antisymétrique, correspondant aux polynômes de LEGENDRE d'ordre respectivement pair et impair. Pour le détail des solutions, nous renvoyons à l'article de K. HIDAOKA⁽⁹³⁾. Relevons cependant quelques valeurs propres : $a\sqrt{\lambda/h_0}$ a pour valeurs, dans le cas du bassin carré :

	($r = 0$)	($r = 1$)	($r = 2$)
($i = 1$)	0,9003 $\pi/2$	1,155 $\pi/2$	2,219 $\pi/2$
($i = 2$)	1,559 $\pi/2$	1,547 $\pi/2$	2,620 $\pi/2$
($i = 3$)	2,205 $\pi/2$	1,993 $\pi/2$	2,957 $\pi/2$

La comparaison avec un bassin carré de même surface et de profondeur constante, égale à $2h_0/3$, de manière que le volume de l'eau contenue dans les deux bassins soit le même, montre que pour certains modes la période d'oscillation est allongée, et que pour d'autres elle est raccourcie, sans qu'on puisse apercevoir de relation simple entre la valeur des indices et la modification de période subie par le mode correspondant; la table suivante donne le rapport des fréquences du bassin de profondeur variable à celles du bassin de profondeur constante :

	($r = 0$)	($r = 1$)	($r = 2$)
($i = 1$)	1,103	1,001	1,216
($i = 2$)	0,9549	0,8473	1,135
($i = 3$)	0,9003	0,7727	1,005

(93) HIDAOKA, K., *Tidal Oscillations...*, Mem. Imp. Mar. Obs., V, 1 (1932), pp. 15-23.

b) Lac de profondeur $h(x, y) = h_0(1 - x/a)$ (origine de l'axe $0x$ au milieu du bassin), et de largeur b_0 , d'où à nouveau $-b_0/2 \leq y \leq b_0/2$.

L'équation (VI.4) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{h_0} \zeta = 0, \quad (\text{VI.6})$$

et les conditions-frontière s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_{y=\pm b_0/2} = 0; \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{x=-a} = 0; \quad a\zeta(a) - h_0\xi(a) = 0,$$

ou, en remarquant que $\lambda\xi = \partial\zeta/\partial x$:

$$\lambda a\zeta(a) - h_0\zeta'(a) = 0.$$

Prenons, pour résoudre (VI.6), des solutions

$$\zeta = \cos \frac{p\pi y}{b_0} \cdot w(x), \quad (p \text{ entier pair})$$

$$\zeta = \sin \frac{q\pi y}{b_0} \cdot w(x), \quad (q \text{ entier impair}).$$

L'équation prend alors la forme (en écrivant r pour p et q) :

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{dw}{dx} \right] + \left[\frac{\lambda}{h_0} - \left(\frac{r\pi}{b_0}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right] w = 0, \quad (\text{VI.6'})$$

ou, en posant $r\pi a/b_0 = \beta_r$, $2\beta_r(1 - x/a) = x'$:

$$\frac{d}{dx'} \left[x' \frac{dw}{dx'} \right] + \left[\frac{\lambda}{h_0} \cdot \frac{a^2}{2\beta_r} - \frac{1}{4} x' \right] w = 0.$$

Elle admet pour solutions

$$w(x') = e^{-\frac{1}{2}x'} \cdot \mathfrak{M} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda a^2}{2h_0\beta_r}, 1, x' \right),$$

où $\mathfrak{M}(\alpha, \gamma, x')$ désigne la fonction hypergéométrique confluyente de WHITTAKER⁽⁹⁴⁾. Comme $x' = 0$ pour $x = a$, la dernière condition-frontière est satisfaite automatiquement (il suffit de faire $x = a$ dans l'équation (VI.6), pour trouver la condition-frontière en question). La seconde condition-frontière s'écrit :

$$\left(\frac{dw}{dx'}\right)_{x'=2\beta_r} = 0.$$

⁽⁹⁴⁾ Cf. WHITTAKER, E. and WATSON, N., *Modern Analysis*, 4^e éd, 1950, chap. XVI, pp. 337-354.

A l'aide des relations classiques :

$$\frac{d}{dx} \left[\mathfrak{N}(\alpha, \gamma, x) \right] = \frac{\alpha}{\gamma} \mathfrak{N}(\alpha + 1, \gamma + 1, x);$$

$$\alpha \mathfrak{N}(\alpha + 1, \gamma + 1, x) = (\alpha - \gamma) \mathfrak{N}(\alpha, \gamma + 1, x) + \gamma \mathfrak{N}(\alpha, \gamma, x),$$

on en tire l'équation aux périodes :

$$\mathfrak{N}(-\alpha_r, 1, 4\beta_r) - 2(1 + \alpha_r) \mathfrak{N}(-\alpha_r, 2, 4\beta_r) = 0, \quad (\text{VI.7})$$

où $\alpha_r = \frac{\lambda a^2}{2\beta_r h_0} - \frac{1}{2}$. Cette équation possède une infinité de racines positives $\alpha_r = \alpha_{rs}$ ($s=1, 2, \dots$). Soit α_{rs} la s^{e} racine : on a alors immédiatement.

$$\frac{\lambda_r}{h_0} = \frac{2r\pi}{ab_0} \left(\alpha_{rs} + \frac{1}{2} \right),$$

formule qui correspond à celle donnée par H. LAMB pour le bassin rectangulaire de profondeur constante (cf. p. 170, note 92).

Dans le cas particulier où $r=0$, la fonction $\mathfrak{N}(-\alpha_r, 1, x)$ se réduit à une fonction de BESSEL; en effet, l'équation en $w(x)$ devient alors :

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right) \frac{dw}{dx} \right] + \frac{\lambda}{h_0} w = 0.$$

Si l'on veut des solutions finies en $x=a$, on doit prendre

$$w(x) = J_0(2\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{1-x/a}).$$

Quand $r=1$, on a une ligne nodale coïncidant avec l'axe Ox , et s lignes nodales perpendiculaires.

Cas $r=1, s=0$; K. HIDAHA trouve $\alpha_{10} \simeq 0$, d'où

$$\frac{\lambda}{h_0} \simeq \frac{\pi}{ab_0}$$

et par suite

$$T_{10} \simeq \frac{2b_0}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{\pi a/b_0},$$

alors que dans le cas de la profondeur uniforme h_0 (égale à la profondeur moyenne du lac de profondeur variable), on avait (formule de MERIAN) :

$$T_1 = \frac{2b_0}{\sqrt{gh_0}}.$$

Dans le cas de la profondeur variable, le rapport des dimensions du bassin ($2a, b_0$) influence donc les périodes d'oscillation : il s'agit bien d'un problème à deux dimensions horizontales.

Pour $r=1, s=1$, on a $\alpha_{11}=0,9942$, et l'on obtient $\lambda/h_0=9,3886/ab_0$. Pour le bassin de profondeur constante, h_0 , on avait (cf. p. 170, note 92) :

$$\frac{\lambda}{h_0} = \pi^2 \left(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{b_0^2} \right).$$

La période du bassin de profondeur variable est donc toujours plus longue que celle du bassin de profondeur constante (cf. les conclusions des pp. 45-46).

c) Lac rectangulaire de dimensions a, b , et de profondeur

$$h(x, y) = h_0 \left(1 - \frac{4x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right).$$

L'équation en ζ s'écrit (en posant $2x/a=x', 2y/b=y'$) :

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[(1-x'^2)(1-y'^2) \frac{\partial \zeta}{\partial x'} \right] + \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left[(1-x'^2)(1-y'^2) \frac{\partial \zeta}{\partial y'} \right] + \frac{\lambda a^2}{4h_0} \zeta = 0. \quad (\text{VI.8})$$

Les conditions-frontière sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta + \frac{2}{a} \frac{\partial h}{\partial x'} \xi = 0, \quad \text{en } x' = \pm 1, \\ \zeta + \frac{2}{b} \frac{\partial h}{\partial y'} \eta = 0, \quad \text{en } y' = \pm 1, \end{array} \right.$$

ou, à cause des équations du mouvement :

$$\frac{\lambda a^2}{4} \zeta + \frac{\partial h}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x'} = 0 \quad \text{en } x' = \pm 1; \quad \frac{\lambda b^2}{4} \zeta + \frac{\partial h}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y'} = 0 \quad \text{en } y' = \pm 1.$$

Pour résoudre (VI.8), K. HIDAOKA pose

$$\zeta = \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} A_{ij} P_i(x') P_j(y')$$

(tous les i et tous les j étant séparément de même parité). Introduisant cette expression dans l'équation, il obtient une relation de récurrence entre cinq coefficients : $A_{i-2j}, A_{i,j-2}, A_{i,j}, A_{i,j+2}, A_{i+2j}$. Si l'on arrête le développement après m termes en $P_i(x')$ et n termes en $P_j(y')$, il y aura en tout mn coefficients A_{ij} , et le déterminant-équation aux valeurs propres sera d'ordre mn .

K. HIDAOKA calcule quelques valeurs propres. En se contentant de prendre

$m=n=1$, il trouve, pour le mode le plus bas, antisymétrique par rapport à $0y'$ et symétrique par rapport à $0x'$: $\lambda a^2/4 = 4h_0/3$ (indépendamment du rapport a/b). En approximation supérieure ($m=n=2$) on a $\lambda a^2/4 = 1,279 h_0$ (pour $a/b=2$); $1,1338 h_0$ (pour $a/b=1$); $0,820 h_0$ (pour $a/b=1/2$).

En troisième approximation ($m=n=3$), les résultats sont respectivement : $\lambda a^2/4 = 1,272 h_0$; $1,103 h_0$; $0,726 h_0$.

Comparons ces résultats à ceux qu'on obtiendrait pour un bassin de profondeur constante en y , et dont la profondeur maxima serait égale à $2h_0/3$ (de manière à ce que le volume d'eau soit le même que dans un bassin parabolique en y). L'équation (VI.8) se réduit alors à :

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[(1-x'^2) \cdot \frac{2}{3} h_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x'} \right] + \frac{\lambda a^2}{4} \zeta = 0.$$

On a immédiatement, pour le mode fondamental (à un seul nœud en $0x'$) :

$$\zeta = A_1 P_1(x'), \quad \frac{\lambda a^2}{4} = \frac{4}{3} h_0.$$

C'est vers cette dernière valeur que tend $\lambda a^2/4$ lorsque le rapport a/b croît, c'est-à-dire lorsque le mouvement selon $0x'$ devient prépondérant; il y a ainsi « raccordement » entre le problème à deux dimensions et celui à une seule.

§ 3. LACS DE LARGEUR VARIABLE ET DE PROFONDEUR CONSTANTE.

Supposons que la largeur $b(x)$ du lac ne varie que lentement avec x , c'est-à-dire que b'/b et b''/b' soient négligeables devant l'inverse de l'unité naturelle de longueur, qui est égale à $\Lambda/2\pi$ ($\Lambda =$ longueur d'onde de la seiche transversale). On verra plus loin l'intérêt de cette restriction, qui permet de simplifier considérablement l'équation aux seiches.

La profondeur se réduisant à une constante h_0 , l'équation (VI.4) peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{h_0} \zeta = 0.$$

Par suite de l'hypothèse faite sur $b(x)$, on aura $\partial \zeta / \partial n \simeq \partial \zeta / \partial y$, de sorte que la condition-frontière se réduit à $\partial \zeta / \partial y = 0$.

Posons donc, afin de satisfaire immédiatement à cette condition :

$$\zeta = \cos \frac{p \pi y}{b(x)} \cdot w(x), \quad (p = \text{entier pair}),$$

ou

$$\zeta = \sin \frac{q \pi y}{b(x)} \cdot w(x), \quad (q = \text{entier impair}),$$

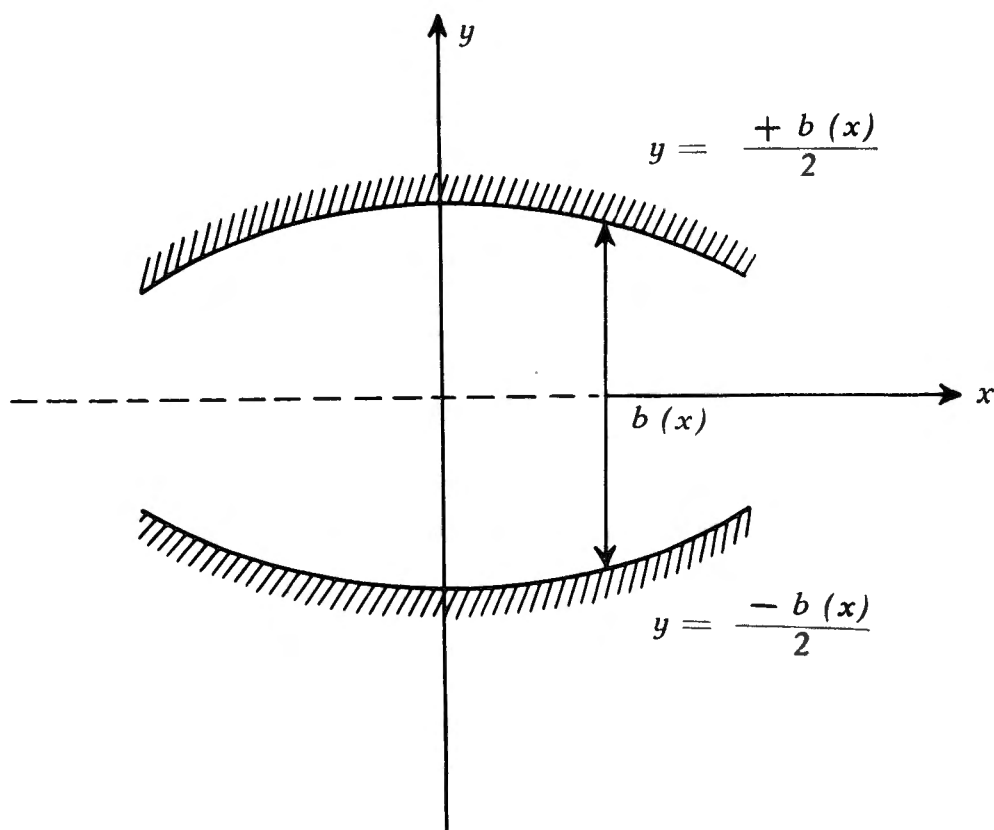


FIG. 33.

p et q désignant le nombre de nœuds transversaux de la seiche; l'axe Ox est équidistant des deux rives entre lesquelles ont lieu les seiches transversales, et l'on a, comme plus haut,

$$-\frac{b(x)}{2} \leq y \leq \frac{b(x)}{2}.$$

L'amplitude ζ de la seiche est ainsi modulée longitudinalement par la fonction $w(x)$.

Introduisant ζ ainsi défini dans l'équation ci-dessus, et écrivant r pour p et q , il vient (en négligeant $(b'/b)^2$ et $b'' b'/b'b$ devant $4\pi^2/\Lambda^2$) :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left[\frac{\lambda}{h_0} - \frac{r^2 \pi^2}{b^2(x)} \right] w(x) = 0. \quad (\text{VI.9})$$

Suivant que l'expression

$$\frac{\lambda}{h_0} - \frac{r^2 \pi^2}{b^2(x)}$$

est positive ou négative, la fonction $w(x)$ aura une allure oscillante ou exponentielle amortie. L'apparition de seiches transversales est ainsi conditionnée par les variations de largeur du lac : dans les parties « renflées », $w(x)$ aura une allure oscillante, c'est-à-dire qu'il y aura des seiches, tandis que dans les parties où le lac se rétrécit, $w(x)$ prendra l'allure d'une exponentielle amortie, c'est-à-dire que les seiches s'évanouiront exponentiellement de part et d'autre des régions « renflées » du lac.

On peut encore remarquer que si $b(x)$ tend vers zéro aux extrémités du lac, $w(x)$ devra également y tendre vers zéro ($d^2 w/dx^2$ restant fini !), chose physiquement intuitive : l'amplitude des seiches transversales doit tendre vers zéro dans les zones où la largeur du lac tend vers zéro. Si au contraire $b(x)$ ne s'annule pas aux extrémités (cas d'un lac « tronqué »), la seiche pourra continuer à se manifester aux extrémités, et $w(x)$ y sera en général différent de zéro.

Nous avons pu repérer quelques cas où l'équation (VI.9) admet des solutions exactes.

a) Premier cas :

$$b^2(x) = \frac{b_0^2}{1 + \alpha^2 x^2},$$

b_0 étant la largeur à l'origine ($x=0$), et α étant une constante (ayant pour dimension l'inverse d'une longueur), dont l'ordre de grandeur sera fixé ci-après, compte tenu de la restriction initiale imposée à la largeur variable du lac.

Le champ de la variable x est donné par $-\infty \leq x \leq \infty$ (lac de longueur infinie).

On a $b'/b = -\alpha^2 x/(1 + \alpha^2 x^2)$. Dans quelles conditions cette quantité sera-t-elle négligeable devant $2\pi/\Lambda$? Cette exigence est évidemment remplie lorsque $|x|$ est très petit (au voisinage de l'origine) ou très grand. Pour y satisfaire en général, cherchons pour quelle valeur de x la fonction $|\alpha^2 x/(1 + \alpha^2 x^2)|$ est maximum, et déterminons α de manière à rendre ce maximum négligeable devant $2\pi/\Lambda$. La valeur cherchée de $|x|$ est $1/\alpha$, et le maximum lui-même est $|\alpha/2|$: la condition cherchée est donc $\alpha \ll 4\pi/\Lambda$. On peut montrer que la

seconde restriction ($b''/b' \ll 2\pi/\Lambda$) peut être remplacée par $b''/b \ll 4\pi^2/\Lambda^2$; il suffit pour cela de développer les calculs qui conduisent à l'équation (VI.9).

Cette substitution est toute indiquée dans le cas présent, où b' s'annule à l'origine sans que b'' s'y annule, et où par conséquent $b''/b' \ll 2\pi/\Lambda$ serait irréalisable.

On a

$$\frac{b''}{b} = \frac{\alpha^2(1 - 2\alpha^2 x^2)}{(1 + \alpha^2 x^2)^2},$$

fonction dont le maximum égale α^2 et est atteint pour $x=0$. La condition à imposer ici à α^2 est donc $\alpha^2 \ll 4\pi^2/\Lambda^2$.

Résumant les deux conditions trouvées en une seule, on a $\alpha \ll 2\pi/\Lambda$.

Mais, comme $\Lambda = 2b(x)/r$ pour les seiches transversales (l'unité naturelle de longueur est ainsi $b(x)/r\pi$), il faut donc que l'on ait $\alpha \ll r\pi/b(x)$.

Solution de l'équation (VI.9).

Dans le cas présent elle écrit

$$w'' + \left[\left(\frac{\lambda}{h_0} - \frac{r^2 \pi^2}{b_0^2} \right) - \frac{r^2 \pi^2 \alpha^2}{b_0^2} x^2 \right] w(x) = 0. \quad (\text{VI.10})$$

Posons $\lambda/h_0 - r^2 \pi^2/b_0^2 = \mu$ (valeur propre du problème).

L'équation (VI.10) n'est autre que celle de SCHRÖDINGER pour l'oscillateur harmonique de la mécanique ondulatoire; ses seules solutions physiquement acceptables ici sont :

$$w_{nr} = e^{-\frac{r\pi\alpha}{b_0} x^2} \cdot H_n \left(x \sqrt{\frac{r\pi\alpha}{b_0}} \right), \quad (\text{VI.11})$$

H_n désignant le n° polynôme d'HERMITE (n = nombre de nœuds longitudinaux).

Les valeurs propres du paramètre μ sont :

$$\mu_{nr} = (2n + 1) \frac{r\pi\alpha}{b_0},$$

ou, en revenant à λ :

$$\lambda_{nr} = \frac{r^2 \pi^2 h_0}{b_0^2} + (2n + 1) \frac{r\pi\alpha h_0}{b_0}.$$

Si l'on veut encore normer les fonctions propres w_{nr} , il suffit de les multiplier par la constante $\left[\sqrt{\frac{r\alpha}{b_0}} \cdot \frac{1}{n! 2^n} \right]^{\frac{1}{2}}$ ⁽⁹⁵⁾.

(95) Cf. PAULING, L. and WILSON, T. B., *Introduction to Quantum Mechanics*, p. 80.

Comparons ces résultats à ceux obtenus pour le lac de profondeur constante h_0 et de largeur constante b_0 . La formule de MERIAN donne, pour les seiches transversales d'un tel lac (supposé de longueur illimitée, comme celui étudié ci-dessus),

$$T_{or} = \frac{2b_0}{r\sqrt{gh_0}} \quad \text{ou} \quad \lambda_{or} = \frac{\pi^2 r^2 h_0}{b_0^2},$$

(on a ici $n=0$, puisqu'on ne considère qu'une seule dimension), alors que la formule trouvée pour le lac de largeur variable donnait (avec $n=0$)

$$\lambda_{or} = \frac{\pi^2 r^2 h_0}{b_0^2} + \frac{r \pi \alpha h_0}{b_0}.$$

Il en résulte que la période propre du lac de largeur variable est plus courte que celle du lac de largeur constante, ainsi qu'on pouvait s'y attendre à cause du rétrécissement de part et d'autre de l'origine.

Pour les seiches sans nœuds longitudinaux, le rapport des périodes est

$$\frac{T_{const.}}{T_{var.}} = \sqrt{1 + \frac{\alpha b_0}{r\pi}}.$$

S'il y a des nœuds longitudinaux (pour les seiches du lac de largeur variable seulement !), ce rapport devient

$$\frac{T_{const.}}{T_{var.}} = \sqrt{1 + \frac{2n+1}{r} \cdot \frac{\alpha b_0}{\pi}}.$$

La présence de ces nœuds longitudinaux produit donc un effet inverse de celui des nœuds transversaux, puisqu'il accentue l'écart entre les deux périodes, alors que l'augmentation du nombre r de nœuds transversaux tend à réduire cet écart.

b) Deuxième cas :

$$b(x) = b_0 \cos \frac{\pi x}{l},$$

b_0 désignant la largeur du lac à l'origine ($x=0$), et l sa longueur. Le champ de la variable x est donné par $-l/2 \leq x \leq l/2$ (lac de longueur finie).

Dans quelles conditions aura-t-on

$$\frac{b'}{b} \ll \frac{2\pi}{\Lambda} \quad \text{et} \quad \frac{b''}{b} \ll \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} ?$$

On a

$$\frac{b'}{b} = -\frac{\pi}{l} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{l}.$$

Par suite, la première inégalité exige

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\pi x}{l} \right| \ll \frac{2l}{\Lambda}$$

ou, puisque $\Lambda = 2b(x)/r$:

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\pi x}{l} \right| \ll \frac{rl}{b(x)},$$

ou enfin, à cause de la définition de $b(x)$:

$$\left| \sin \frac{\pi x}{l} \right| \ll \frac{rl}{b_0}.$$

Comme $|\sin(\pi x/l)|$ ne peut dépasser 1, il faudra que l'on ait $b_0 \ll rl$, r étant le nombre (entier et positif) de nœuds transversaux. Il suffit donc que la largeur du lac (à l'origine) soit négligeable devant sa longueur.

La seconde inégalité exige

$$\left| \frac{\pi^2}{l^2} \right| \ll \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{l^2} \ll \frac{r^2}{b^2(x)},$$

c'est-à-dire $b^2(x) \ll r^2 l^2$, inégalité automatiquement réalisée dès que l'on a $b_0 \ll rl$.

L'équation (VI.9) prend ici la forme

$$w'' + \left[\frac{\lambda}{h_0} - \frac{r^2 \pi^2}{b_0^2} \sec^2 \frac{\pi x}{l} \right] w(x) = 0, \quad (\text{VI.12})$$

dont les seules solutions physiquement recevables ici sont :

$$w(x) = \cos^n \frac{\pi x}{l}, \quad (\text{VI.13})$$

où n est un nombre positif supérieur à 1 ⁽⁹⁶⁾, entier ou fractionnaire, défini par $n(n-1) = r^2 l^2 / b_0^2$, équation qui n'admet qu'une seule racine positive.

La condition $b_0 \ll rl$ entraîne que $\sqrt{n(n-1)}$ est un grand nombre; si l'on prend $\sqrt{n(n-1)} \simeq n$, on a $n \simeq \sqrt{rl/b_0}$. Comme la valeur propre λ est donnée par $\lambda = n^2 \pi^2 h_0 / l^2$, valeur (longitudinalement) unique, à cause de l'unicité de n (à chaque valeur de r correspond une seule valeur de n), on a approximativement

$$\lambda \simeq \frac{r^2 \pi^2}{b_0^2} h_0.$$

⁽⁹⁶⁾ $n < 0$ entraînerait $w \rightarrow \infty$ pour $|x| \rightarrow l/2$; $0 < n < 1$ rendrait w' infini pour $|x| \rightarrow l/2$.

Comme $\lambda \sim T^{-2}$, on voit que $T_r \sim 1/r$, c'est-à-dire que les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale, du moins à l'approximation adoptée.

D'autre part, plus l est grand devant b_0 , plus aussi n sera considérable : c'est-à-dire, plus le lac se rapproche d'un canal étroit, plus la seiche est concentrée dans une région étroite située de part et d'autre de l'origine. Par exemple, pour $l = 40 b_0$ (en prenant $r=1$), c'est-à-dire $n \simeq 40$, $\cos^n(\pi x/l)$ n'est plus que de l'ordre de 0,015 pour $|x|=5,8 b_0$: la seiche ne sera donc « importante » que dans la région $-5,8 b_0 \leq x \leq 5,8 b_0$ soit dans le quart de la longueur totale du lac. Pour $l=400 b_0$ ($r=1$), c'est-à-dire $n \simeq 400$, $\cos^n(\pi x/l)$ est inférieur à 0,01 pour $|x|=22 b_0$, de sorte que la région affectée par la seiche n'est plus que le dixième environ de la longueur totale du lac. Apparemment il y a là un paradoxe; en réalité, la signification du phénomène doit être la suivante : des seiches transversales locales sont impossibles dans un lac-canal de largeur et de profondeur constantes. En effet, le cas limite du lac de largeur $b(x) = b_0 \cos(\pi x/l)$, lorsque b_0 devient de plus en plus petit devant l , n'est autre qu'un canal de largeur et de profondeur constantes; la région affectée par les seiches devenant de plus en plus étroite, les seiches locales doivent disparaître complètement à la limite, la zone où elles peuvent se produire devenant nulle à la limite. Des seiches transversales générales au contraire sont possibles dans un lac-canal de largeur et de longueur constantes, mais ceci ne relève plus du problème traité ici : on retombe dans le cas classique du lac rectangulaire de profondeur constante, où le mouvement aurait lieu dans le sens de la « largeur », c'est-à-dire de la plus petite dimension horizontale.

§ 4. CAS DU LAC DE LARGEUR VARIABLE ET DE PROFONDEUR VARIABLE.

Supposons que la profondeur variable h soit une fonction de x seulement : $h = h(x)$; le fond du lac est ainsi une surface cylindrique, dont la génératrice est parallèle à Oy (x =variable longitudinale, y =variable transversale; $-b(x)/2 \leq y \leq b(x)/2$, comme plus haut). Conservons en outre les hypothèses faites précédemment sur la largeur du lac (à savoir b'/b et b''/b' négligeables devant l'inverse de l'unité naturelle de longueur, cf. p. 175); supposons enfin que $h'w'/h(x)$ soit à son tour négligeable devant l'inverse de l'unité naturelle de longueur. Il vient ainsi, en posant comme précédemment :

$$\zeta = \cos \frac{p \pi y}{b(x)} \cdot w(x) \quad (p = \text{entier pair})$$

ou

$$\zeta = \sin \frac{q \pi y}{b(x)} \cdot w(x) \quad (q = \text{entier impair}),$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left[\frac{\lambda}{h(x)} - \frac{r^2 \pi^2}{b^2(x)} \right] w(x) = 0, \quad (\text{VI.14})$$

(r désignant p ou q suivant le cas, c'est-à-dire le nombre de nœuds transversaux). C'est la résolution de cette équation, dite « équation en $w(x)$ », qui fournira un premier procédé de calcul des seiches transversales.

§ 5. MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DE L'ÉQUATION EN $w(x)$.

Les deux méthodes qui vont être exposées dans ce paragraphe nécessitent une « régularisation » préalable du lac, de manière à ce que l'équation à résoudre prenne la forme aisée à traiter :

$$w'' + \left[\frac{\lambda}{h(x)} - \frac{r^2 \pi^2}{b^2(x)} \right] w = 0. \quad (\text{VI.14})$$

La profondeur, qui en général sera fonction de x et de y , devra donc être modifiée de manière à n'être plus fonction que de x seulement, et cela de telle sorte que les périodes transversales soient altérées le moins possible.

Si les sections droites (perpendiculaires au Talweg) sont de forme sensiblement rectangulaire, on pourra se contenter de remplacer dans chacune d'elles la profondeur (variable en y) par une profondeur moyenne $\bar{h}(x)$, définie par $\bar{h}(x) = S(x)/b(x)$. Si au contraire la forme des sections droites en question s'écarte notablement de la forme rectangulaire, on devra calculer pour chacune d'elles une profondeur « réduite » $H(x)$, constante pour chaque section et telle que la période d'oscillation à r nœuds d'un bassin de longueur $b(x)$ et de profondeur $H(x)$ soit égale à la période d'oscillation à r nœuds d'un canal de longueur $b(x)$ et dont la profondeur varie comme celle de la section droite étudiée; en général, cette profondeur « réduite » pourra varier d'un mode à l'autre, et sera dès lors désignée par $H_r(x)$. Le calcul des périodes de chacune des sections droites se fera le plus commodément par la méthode de DEFANT (cf. pp. 56-60); la profondeur « réduite » $H_r(x)$ s'obtient ensuite sans difficulté par la formule de MERIAN. En désignant par $\lambda_r(x)$ la valeur propre $= 4\pi^2/gT_r^2$ du r^{e} mode de la section droite étudiée, on obtient :

$$H_r(x) = \frac{\lambda_r(x) \cdot b^2(x)}{r^2 \pi^2}. \quad (\text{VI.15})$$

Lorsque ces calculs préliminaires sont terminés, le lac se trouve décomposé en bassins de profondeurs « uniformes » (c'est-à-dire indépendantes de y , mais variant en général d'un bassin à l'autre) et de « longueurs » $b(x)$. L'équation en $w(x)$ sera donc bien de la forme (VI.14).

L'étape suivante est la recherche des zones où les seiches transversales peuvent apparaître. On a vu plus haut (p. 177) que l'équation (VI.14) admet des solutions de type oscillant ou de type exponentiel amorti suivant que la fonction $\lambda/h(x) - r^2\pi^2/b^2(x)$ est positive ou négative ($\lambda=4\pi^2/gT^2$ étant pris égal à une de ses valeurs propres). Les seiches apparaîtront donc dans les régions où $H(x)/b^2(x)$ est minimum, et disparaîtront exponentiellement à quelque distance à gauche et à droite de ces minima. Leurs périodes, ou, ce qui revient au même, leurs valeurs propres, seront déterminées par la condition-frontière d'évanescence exponentielle; pratiquement, il suffira évidemment que $w(x)$ et $w'(x)$ tendent exponentiellement vers zéro à quelque distance de part et d'autre des points où H/b^2 est minimum pour qu'on puisse considérer les conditions-frontière comme satisfaites.

La recherche de λ_r se fait par essais successifs, une première valeur d'essai étant fournie, par exemple, par la moyenne des $\lambda_r(x)$ de la région étudiée. On introduit la valeur à essayer dans l'équation (VI.14) et on résout celle-ci par une des deux méthodes suivantes.

a) Première méthode. — Elle repose sur l'emploi des formules de différences finies, du type des formules (II.4-5) ⁽⁹⁷⁾, dont on élimine les dérivées secondes à l'aide de l'équation (VI.14) elle-même, et dont on néglige les termes en Δx^4 , Δx^6 , ... etc., contenant des dérivées d'ordre supérieur au second.

La première des deux formules ci-dessus donne ainsi, en posant pour simplifier, $r^2\pi^2/b^2(x) - \lambda/H(x) = Q(x)$,

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} + \Delta x^2 \cdot Q_n \cdot w_n, \quad (\text{VI.16})$$

où Q_n est fonction de x et de λ_r (désormais indépendant de x) : $Q_n = Q(x_n, \lambda_r)$.

A cause de l'inévitable incertitude (erreurs de mesures et imprécision relative des cartes à petite échelle) sur les données bathymétriques, et aussi à cause de la simplification que constitue déjà l'introduction de la profondeur réduite, $H(x)$, il sera en général inutile de recourir à des formules très raffinées, nécessitant des calculs plus longs, plutôt qu'à des formules plus simples et d'emploi plus commode. Des exemples numériques montreront qu'on arrive à des résultats excellents avec la première des deux formules, et cela avec un Δx relativement grand. La délimitation de la région à étudier se fait en pratique au juger; on verra du reste que la méthode est suffisamment stable pour que les résultats numériques ne soient guère affectés par des différences notables dans la manière de délimiter la région à seiches. A cause des conditions-frontière, la valeur initiale de w , soit w_0 , sera prise nulle; w_1 est ensuite choisi arbitrairement, et les valeurs successives w_2 , w_3 , ... se calculent sans difficulté à l'aide de la relation (VI.16). Lorsque la fonction $w(x)$ construite ainsi point par point présente une

⁽⁹⁷⁾ Cf. p. 62, et MILNE, W. E., *Numerical Calculus*, pp. 138 sqq.

allure satisfaisante (cf. ci-dessus, page 183), la valeur propre λ_r sera considérée comme suffisamment exacte; les exemples numériques traités plus loin montreront du reste l'extraordinaire sensibilité de la méthode: un écart de quelques % entre deux valeurs d'essai suffit parfois à modifier considérablement l'allure des $w(x)$ correspondants.

b) *Seconde méthode.* — Elle consiste à décomposer l'équation (VI.14) en deux équations différentielles du premier ordre et à résoudre simultanément celles-ci à l'aide d'un schéma de calcul (où les différentielles sont remplacées par des différences finies) entièrement analogue à celui utilisé dans la méthode de DEFANT (cf. pp. 56-60).

L'équation

$$w'' + \left[\frac{\lambda_r}{H(x)} - \frac{r^2 \pi^2}{b^2(x)} \right] w = 0, \quad (\text{VI.17})$$

soumise aux conditions-frontière $w(\pm \infty) = 0$ (décroissance exponentielle de w de part et d'autre de la zone où peuvent apparaître les seiches), peut s'écrire (en négligeant de noter l'indice r de λ)

$$w'' + \frac{w}{\theta(x, \lambda)} = 0,$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{\theta(x, \lambda)} = \frac{\lambda}{H(x)} - \frac{r^2 \pi^2}{b^2(x)},$$

ou

$$\theta(x, \lambda) = \frac{b^2(x) \cdot H(x)}{\lambda b^2(x) - r^2 \pi^2 H(x)}.$$

Au cas où le lac ne s'étend pas à l'infini dans les deux directions de l'axe Ox , et où l'une au moins des deux grandeurs $b(x)$ et $H(x)$ s'annule aux extrémités du lac (ce qui y entraîne $\theta(x, \lambda) = 0$, à cause de la définition même de θ), on aura évidemment $w = 0$ aux extrémités, w'' ne pouvant pas y devenir infini.

Posons encore

$$w(x) = \theta(x, \lambda) \cdot \gamma(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \left[\theta(x, \lambda) \cdot \gamma(x) \right] \equiv \frac{dw}{dx} = -\rho(x, \lambda).$$

L'équation (VI.17) s'écrit alors :

$$-\frac{d\rho}{dx} + \gamma(x) = 0. \quad (\text{VI.18})$$

Remplaçons les différentielles par des différences finies : il vient

$$\Delta\rho = \gamma(x) \cdot \Delta x, \quad \gamma(x) = -\frac{1}{\theta(x, \lambda)} \int_0^x \rho(x, \lambda) dx$$

ou, en différences finies et en supposant numérotés les points de division (x_0, x_1, \dots, x_n) :

$$\gamma_k \equiv \gamma(x_k) = -\frac{1}{\theta(x_k, \lambda)} \sum_{j=0}^k \rho(x_j, \lambda) \Delta x_{j+1}.$$

Les fonctions $\gamma(x)$ et $\rho(x, \lambda)$ peuvent ainsi se calculer aisément point par point; $\theta(x, \lambda)$ est connu à l'aide des mesures bathymétriques effectuées sur le lac, et le paramètre λ est une valeur d'essai. Pour chaque nouvelle valeur de λ que l'on veut essayer, il faut évidemment dresser une nouvelle table de θ .

Le schéma du calcul à suivre pour la résolution de l'équation (VI.18) peut alors se représenter comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_k &= \rho_{k-1} + \Delta \rho_k; & (\rho_0 \text{ est choisi arbitrairement}) \\ \Delta \rho_k &= \gamma_k \Delta x_k; & \gamma_k = \frac{w_k}{\theta_k}; & w_k = -\sum_{j=0}^k \rho_j \Delta x_{j+1}; \end{aligned}$$

(les indices se rapportant, comme d'habitude, aux points de subdivision.)

Si l'on compare ce schéma à celui utilisé dans la méthode de DEFANT pour la résolution de l'équation de CHRYSTAL (seiches longitudinales, p. 58) :

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0 \quad [u(0) = u(a) = 0],$$

à savoir :

$$\zeta_k = \zeta_{k-1} + \Delta \zeta_k; \quad \Delta \zeta_k = \lambda \xi_k \Delta x_k; \quad \xi_k = \frac{u_k}{S_k}; \quad u_k = -\sum_{j=0}^k \zeta_j \Delta v_{j+1};$$

on voit que, formellement : x joue le rôle de v (aire de la surface libre, prise comme variable indépendante); $w(x)$ joue le rôle de $u(v)$ (volume d'eau déplacé par la seiche en un quart de période); $\rho(x, \lambda)$ joue le rôle de ζ (élongation verticale); $\theta(x, \lambda)$, celui de $\sigma(v)/\lambda$ [$\sigma = S \cdot b$, S étant l'aire de la section droite, perpendiculaire au Talweg, et b la largeur à la surface libre]; $\gamma(x)$ enfin, celui de $\lambda \xi/b(x)$.

Dans la pratique, l'application de la méthode présente sera un peu moins commode que celle du procédé de DEFANT, puisque pour chaque nouvelle valeur d'essai de λ il faudra dresser une nouvelle table de la fonction $\theta(x, \lambda)$, alors que, dans le procédé de DEFANT, λ est simplement un facteur. Cette complication est inhérente au problème lui-même, et par suite, impossible à éliminer.

Comparons du point de vue théorique les deux méthodes qui viennent d'être exposées.

Dans la première, on utilise la formule $w_{k+1} = 2w_k - w_{k-1} + \Delta x^2 \cdot w''_k + \dots$ (termes qu'on néglige), qui devient, en faisant usage de (VI.17) et en introduisant les notations de la seconde méthode :

$$w_{k+1} = 2w_k - w_{k-1} - \frac{\Delta x^2 \cdot w_k}{\theta_k}. \quad (\text{VI.19})$$

Mais on a posé $w_k = \theta_k \gamma_k$ et $\gamma_k \Delta x = \Delta \rho_k$: il vient ainsi

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= 2w_k - w_{k-1} - \Delta \rho_k \cdot \Delta x \\ &= 2w_k - w_{k-1} - (\rho_k - \rho_{k-1}) \Delta x \\ &= 2w_k - w_{k-1} + \Delta w_k - \Delta w_{k-1}. \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

Par définition, on a $w_k = w_{k-1} + \Delta w_k$; (VI.20) donne dès lors : $w_{k+1} = w_k + (2\Delta w_k - \Delta w_{k-1})$, alors qu'en vertu de la définition on devrait avoir $w_{k+1} = w_k + \Delta w_{k+1}$. On voit donc que l'expression $2\Delta w_k - \Delta w_{k-1}$ joue le rôle de Δw_{k+1} ; autrement dit, c'est comme si la relation (VI.19) avait été appliquée, limitée cette fois à ses deux premiers termes, à Δw_{k+1} lui-même.

Les deux méthodes sont donc bien distinctes. La première notamment nécessite l'emploi d'un Δx constant, ce qui n'est pas requis pour la seconde.

Du point de vue pratique enfin, la première méthode sera nettement plus rapide, bien qu'un peu moins précise que la seconde. Néanmoins, nous verrons plus loin que le supplément de précision auquel on peut aboutir est trop faible pour justifier le supplément considérable de calculs numériques qu'il exige.

c) Application numérique de la première méthode. — Soit un lac dont la largeur est donnée par

$$b^2(x) = \frac{b_0^2(x)}{1 + \alpha^2 x^2}$$

avec : $b_0 = 15$ km, $\alpha = 0,2$ (unités de longueur)⁻¹ (⁹⁸).

Supposons constante la profondeur h du lac : $h_0 = 200$ m; admettons en outre que le lac soit limité par deux murs plans verticaux, perpendiculaires à $0x$, et situés à 30 km chacun du centre du lac.

L'unité naturelle de longueur, pour la seiche transversale uninodale, est ainsi égale à

$$\frac{b_0}{\pi} = \frac{15 \times 10^5 \text{ cm}}{\pi}, \quad \text{soit près de 4,8 km.}$$

En vertu du résultat obtenu page 178, la valeur propre correspondant à l'oscillation à un nœud transversal ($r=1$) et sans nœuds longitudinaux ($n=0$) est donnée (de manière exacte si le lac s'étendait à l'infini dans les deux directions

(⁹⁸) On vérifie immédiatement que pour cette valeur de α , les conditions de « faible variation de la largeur $b(x)$ » sont satisfaites (cf. pp. 177-178) :

$$\frac{b'}{b} = -\frac{\alpha^2 x}{1 + \alpha^2 x^2} \quad \text{et} \quad \frac{b''}{b} = \frac{\alpha^2 (1 - 2\alpha^2 x^2)}{(1 + \alpha^2 x^2)^2}$$

sont bien des quantités petites respectivement devant π/b_0 et π^2/b_0^2 .

en x , mais avec une approximation suffisante pour le cas qui nous occupe) par

$$\lambda_{01} = \frac{\pi^2 h_0}{b_0^2} + \frac{\pi \alpha h_0}{b_0},$$

ou

$$\frac{\lambda_{01}}{h_0} = \frac{\pi^2}{b_0^2} \left(1 + \alpha \frac{b_0}{\pi} \right),$$

c'est-à-dire, puisque $\alpha = 0,2\pi/b_0$,

$$\frac{\lambda_{01}}{h_0} = 1,2 \cdot \frac{\pi^2}{b_0^2}.$$

On en tire : $T^2 = 4b_0^2/1,2gh_0 = 0,382263 \times 10^6 \text{ sec}^2$, c'est-à-dire : $T = 618,27 \text{ sec}$.

Divisons le lac en dix tronçons égaux (suivant l'axe $0x$); on a donc $\Delta x = 0,4 \pi$ unités de longueur = $0,4 b_0 = 6 \text{ km}$.

En prenant comme valeur d'essai de λ_{01} la valeur exacte $1,2 h_0 \pi^2 / b_0^2$, on aura la table suivante, où l'on a calculé $w(x)$ à l'aide de la formule

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} + \Delta x^2 \cdot Q_n \cdot w_n.$$

Comme

$$Q(x) \equiv \frac{\pi^2}{b^2(x)} - \frac{\lambda}{h_0} = \frac{\pi^2}{b_0^2} [(1 + \alpha^2 x^2) - 1,2], \quad \Delta x^2 = 0,16 \pi^2 \cdot \frac{b_0^2}{\pi^2},$$

cette formule peut s'écrire

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} + 0,16 \pi^2 (\alpha^2 x_n^2 - 0,2) w_n.$$

Section n°	x (en unités b_0)	$(\alpha^2 x^2 - 0,2)$ (nombre pur)	$w(x)$ (en unités de longueur arbitraires)
0	-2,00	1,379137	0
1	-1,60	0,810647	1
2	-1,20	0,368489	3,280123
3	-0,80	0,052662	7,468932
4	-0,40	-0,136835	12,278861
5	0,00	-0,200000	14,435559
6	0,40	-0,136835	12,033112
7	0,80	0,052662	7,030536
8	1,20	0,368489	2,612623
9	1,60	0,810647	-0,285019
10	2,00	1,379137	-3,547520

L'allure de $w(x)$ dans les dernières sections du lac (8-9-10) n'étant pas satisfaisante (il ne peut pas y avoir de nœud longitudinal !), il y a lieu de recommencer avec une autre valeur d'essai pour λ_{01} .

Prenons $\lambda_{01} = 1,19 \times h_0 \pi^2 / b_0^2$ ($T \approx 620,87$ sec). On obtient alors la table suivante :

Section n°	x (en unités b_0)	$(\alpha^2 x^2 - 0,19)$ (nombre pur)	$w(x)$ (en unités de longueur arbitraires)
0	-2,00	1,389137	0
1	-1,60	0,820647	1
2	-1,20	0,378489	3,295914
3	-0,80	0,062662	7,561750
4	-0,40	-0,126835	12,575835
5	0,00	-0,190000	15,071108
6	0,40	-0,126835	13,044505
7	0,80	0,062662	8,405220
8	1,20	0,378489	4,597647
9	1,60	0,820647	3,538023
10	2,00	1,389137	7,063373

On voit que cette fois-ci, au lieu de décroître exponentiellement, $w(x)$ recommence à croître dans les dernières sections du lac; il faudra donc corriger à nouveau λ_{01} , mais dans l'autre sens. Remarquons l'extrême sensibilité de la méthode : un écart de moins de 1 % entre les deux valeurs de λ_{01} suffit à modifier entièrement l'allure de $w(x)$ à l'extrémité du lac.

Prenons maintenant $\lambda_{01} = 1,197 \times h_0 \pi^2 / b_0^2$ ($T = 619,05$ sec.).

On trouve alors :

Section n°	x (en unités b_0)	$(\alpha^2 x^2 - 0,197)$ (nombre pur)	$w(x)$ (en unités de longueur arbitraires)
0	-2,00	1,382137	0
1	-1,60	0,813647	1
2	-1,20	0,371489	3,284860
3	-0,80	-0,055662	7,496724
4	-0,40	-0,133835	12,367535
5	0,00	-0,197000	14,624544
6	0,40	-0,133835	12,332012
7	0,80	0,055662	7,433185
8	1,20	0,371489	3,187720
9	1,60	0,813647	0,812274
10	2,00	1,382137	-0,519514

$w(x)$ peut à présent être considéré comme satisfaisant; une valeur probablement meilleure pour λ_{01} serait

$$1,1967 \times h_0 \pi^2 / b_0^2 \quad (T = 619,13 \text{ sec}).$$

En considérant cette dernière valeur comme la valeur « exacte » obtenue par la méthode appliquée ici, on voit que l'erreur ainsi commise sur λ_{01} est inférieure à 0,3 %, et celle commise sur T_{01} inférieure à 0,14 %. L'amélioration que l'on peut espérer en utilisant des formules de différences finies plus raffinées est donc entièrement négligeable, et l'on se contentera, dans les calculs numériques des chapitres suivants, de la formule employée ici.

Remarquons également, à propos de cet exemple numérique, que l'unité naturelle de longueur s'élimine d'elle-même; il ne subsiste que l'unité arbitraire choisie pour $w(x)$, qui possède les dimensions d'une longueur.

§ 6. NOUVELLE MÉTHODE DE RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE CHRYSTAL ÉTENDUE À DEUX DIMENSIONS.

[Équations (VI.1) à (VI.4).]

Le succès des méthodes exposées dans les paragraphes précédents reposait essentiellement sur la possibilité de séparer les deux variables spatiales x et y (appelées respectivement variable « longitudinale » et variable « transversale » dans les pages qui précèdent), et de ramener ainsi le problème à deux dimensions à un problème à une seule dimension. Afin de rendre cette séparation possible, on avait dû introduire l'hypothèse de la « faible variation » de $b(x)$ et, éventuellement, de $h(x)$ (pp. 175, 181). Il est aisé de montrer que si cette hypothèse cesse d'être valable, la séparation des variables x et y n'est plus possible. On a beau poser

$$\zeta = \frac{\cos \left\{ \frac{r \pi y}{b(x)} \right\}}{\sin \left\{ \frac{r \pi y}{b(x)} \right\}} \cdot w(x)$$

(ou, pour plus de raffinement, ε étant une constante petite devant l'unité,

$$\zeta = \left[\frac{\sin \left\{ \frac{r \pi y}{b(x)} \right\}}{\cos \left\{ \frac{r \pi y}{b(x)} \right\}} \cdot w(x) + \varepsilon \cdot \frac{\cos \left\{ \frac{r \pi y}{b(x)} \right\}}{\sin \left\{ \frac{r \pi y}{b(x)} \right\}} \cdot z(x) \right],$$

les fonctions $w(x)$ et $z(x)$ étant encore reliées entre elles par la condition-frontière

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} n_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} n_y = 0$$

les parois étant supposées verticales), on obtient inévitablement une équation différentielle en w où y réapparaît, ce qui montre que l'hypothèse de la séparabilité des variables contenait une contradiction interne, non apparente à première vue.

Mathématiquement, on le vérifie en développant les calculs à partir des égalités posées quelques lignes plus haut pour ζ .

Physiquement, la chose peut s'interpréter comme suit. Aussi longtemps que la largeur du lac varie « très peu » le long du Talweg, on peut considérer les sections droites $x = \text{const.}$ comme pratiquement orthogonales aux parois latérales du lac, et, par conséquent, admettre que le mouvement d'oscillation transversale se fait par tranches sensiblement parallèles à l'axe Ox . Si de plus h est constant en y (ou rendu tel par une « régularisation » convenable des sections droites perpendiculaires au Talweg), il est légitime de poser ζ proportionnel à $\sin [q\pi y/b(x)]$ ($q = \text{entier impair}$) — ou à $\cos [p\pi y/b(x)]$ ($p = \text{entier pair}$), suivant qu'on s'intéresse aux modes antisymétriques (nœud au centre) ou symétriques (ventre au centre). Mais dès que la largeur du lac cesse d'être « peu variable » le long du Talweg, l'orthogonalité cesse d'exister entre les parois latérales et les surfaces $x = \text{const.}$, et le mouvement, au lieu de se faire par tranches parallèles à Ox , d'épaisseur pratiquement constante en x , et orthogonales aux frontières du lac aux extrémités ($x = \alpha$, $x = \beta$ par exemple), va maintenant avoir lieu par tranches d'épaisseur variable en x et orthogonales au contour incurvé de la région où ont lieu les seiches (cf. fig. 34). Si l'on voulait encore tenter de représenter ζ à l'aide de \sin ou de \cos , le rôle de y serait joué à présent par une coordonnée curviligne orthogonale aux courbes $\zeta = \text{const.}$ Par suite, en coordonnées x, y il n'y a plus en général possibilité de séparer les variables spatiales, et l'on se trouve devant un véritable problème de seiches à deux dimensions.

De là l'idée de résoudre le problème à l'aide de coordonnées curvilignes, ce qui permettrait à nouveau de séparer les deux variables spatiales.

On a obtenu plus haut (pp. 168-170), pour l'équation de continuité :

$$\zeta = - \text{div } \Phi \quad (\text{VI.1})$$

(Φ désignant le secteur surface balayée par une colonne de base infiniment petite $dxdy$ au cours de son déplacement :

$$\Phi = h(x, y) \cdot (\vec{\xi}, \vec{\eta}),$$

ξ et η étant les composantes de ce dernier) et pour l'équation du mouvement :

$$\lambda \Phi = h(x, y) \cdot \text{grad } \zeta. \quad (\text{VI.2})$$

Au lieu des coordonnées (x, y) , introduisons des coordonnées curvilignes définies comme suit (cf. fig. 34) :

Une famille de courbes $\psi = \text{const.}$, le long desquelles ζ conserve une même valeur; lorsque le lac est limité par des parois verticales, ces courbes sont orthogonales à ces parois.

Une famille de courbes $\chi = \text{const.}$, orthogonales aux précédentes; les rives du lac, lorsqu'elles sont constituées par des parois verticales, appartiennent par conséquent à cette famille.

Pour des lacs réels, ces deux familles de courbes se tracent au juger; ceci est largement facilité par le fait que la famille $\psi = \text{const.}$ peut être prise ortho-

gonale aux rives du lac : il suffit pour cela de « rogner » les rives en pente très douce, de manière à pouvoir assimiler le nouveau rivage à une paroi verticale (comme on l'a déjà fait précédemment cf. pp. 91, 110). On verra du reste plus

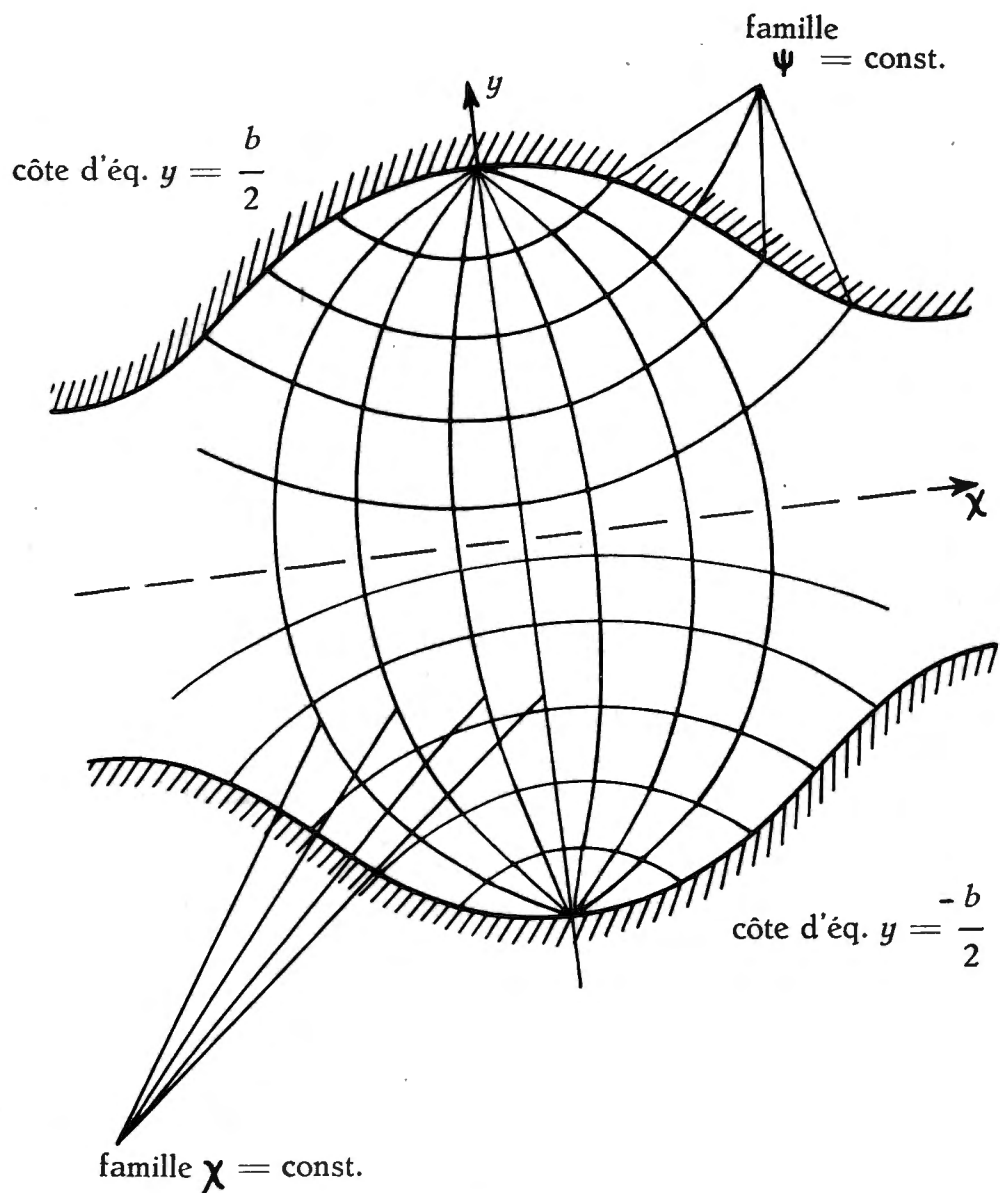


FIG. 34.

loin que de notables inexactitudes dans le tracé de ces courbes n'influencent que faiblement les périodes d'oscillation calculées.

Transformons maintenant l'équation de continuité. On a, en vertu du théorème de la divergence :

$$\int \text{div } \Phi \, d\tau = \oint \Phi \, dS$$

($d\tau$ = élément de volume, dS = élément de surface); par suite (VI.1) devient :

$$-\int \zeta d\tau = \oint \Phi dS. \quad (\text{VI.21})$$

Le second membre de cette égalité désigne la somme des flux sortant d'une suite de colonnes élémentaires, de volumes $h(\psi, \chi) d\psi d\chi$. Mais, comme pour chacune de ces colonnes deux faces seulement (de la famille des $\psi = \text{const.}$) contribuent au bilan du flux, on peut écrire, pour une colonne comprise entre les sections $\psi = \psi_{k-1}$ (= const.) et $\psi = \psi_k$ (= const.) d'une part et $\chi = \chi_{l-1}$ et $\chi = \chi_l$ d'autre part, et qui sera appelée la k^{e} colonne du l^{e} filet :

$$(\text{flux sortant})_{k,l} = -\Phi_{k-1,l} dS_{k-1,l} + \Phi_{k,l} dS_{k,l}, \quad (\text{VI.22})$$

(le flux sortant étant compté négativement, ce qui est contraire à ce qui se fait d'habitude, mais permettra dans le cas présent d'aboutir à des formules en tout point analogues à celles de DEFANT, utilisées dans le calcul des seiches longitudinales). Faisons maintenant successivement $k = 1, 2 \dots j$, et additionnons les égalités obtenues; il vient :

$$\int_0^{\tau_{j,l}} \zeta d\tau_{k,l} = -\Phi_{j,l} dS_{j,l}, \quad (\text{VI.23})$$

$\tau_{j,l}$ désignant le volume des j premières colonnes élémentaires composant le l^{e} filet, et $\Phi_{0,l}$ étant évidemment nul.

Si l'on fait la somme de toutes les égalités (VI.23) qu'on peut écrire en prenant successivement $l = 1, 2 \dots n$, c'est-à-dire si l'on additionne les colonnes élémentaires comprises entre les surfaces $\psi = \psi_{j-1}$ et $\psi = \psi_j$, le volume élémentaire à considérer sera celui d'une tranche (la j^{e} tranche), et sera appelé $d\tau_j$. A Φ_j , qui, en général, varie tout le long de la tranche (mais d'autant plus faiblement que celle-ci est plus mince), on substituera pour le calcul numérique un Φ moyen, noté $\bar{\Phi}$ et défini par

$$\int_{y=-b/2}^{y=b/2} \Phi_{j,l} dS_{j,l}(y) = \bar{\Phi}_j S_j,$$

l'intégration étant effectuée d'une rive à l'autre, c'est-à-dire sur toute la largeur b du lac (cf. fig. 34).

A cause de la définition des coordonnées curvilignes adoptées, ζ est constant tout le long d'une même tranche; la sommation des (VI.23) sur toute une tranche donne donc :

$$\int_0^{\tau_j} \zeta d\tau_k = -\bar{\Phi}_j S_j,$$

ou, en procédant par éléments finis :

$$\bar{\Phi}_j = -\frac{1}{S_j} \sum_{k=1}^j \zeta_k \Delta\tau_k. \quad (\text{VI.24})$$

On aboutit à une formule un peu plus simple si l'on remarque que $d\tau = h(\psi, \chi) d\psi d\chi$ et que

$$\Phi = h(\psi, \chi) \cdot (\xi, \eta);$$

une simplification par $h(\psi, \chi)$ conduit alors sans difficulté à la formule

$$\bar{\varphi}_j = -\frac{1}{S_j} \sum_{k=1}^j \zeta_k \Delta v_k, \quad (\text{VI.25})$$

où φ désigne le vecteur (ξ, η) ($\bar{\varphi}_j$ étant un φ_j moyen analogue au $\bar{\Phi}_j$ moyen défini ci-dessus), et Δv_k l'élément de surface libre correspondant à chaque tranche curviligne.

On peut naturellement retrouver les mêmes résultats en refaisant en coordonnées curvilignes (ψ, χ) le raisonnement de G. CHRYSTAL sur la conservation du volume d'une tranche liquide dans un déplacement φ . De toute manière, on se trouve ramené en fait à un problème à une seule dimension.

Pour l'équation du mouvement, appliquée à la j° colonne du l° filet, on a immédiatement, par (VI.2) :

$$\lambda \Phi_{jl} = h(\psi, \chi) \cdot \frac{\zeta_j - \zeta_{j-1}}{\Delta \psi_j}, \quad (\text{VI.26})$$

d'où l'on tire, pour calculer ζ_j :

$$\zeta_j = \zeta_{j-1} + \lambda \bar{\varphi}_j \Delta \psi_j.$$

Comme ζ est constant le long des courbes $\psi = \text{const.}$, cette dernière égalité peut s'écrire, en prenant

$$\Delta \bar{\psi}_j = \frac{2 \Delta v_j}{\sum_i \Delta \chi_{j-1,i} + \sum_i \Delta \chi_{j,i}}$$

comme « largeur » moyenne de la tranche :

$$\zeta_j = \zeta_{j-1} + \lambda \bar{\varphi}_j \Delta \bar{\psi}_j. \quad (\text{VI.27})$$

Les égalités (VI.24), (VI.25) et (VI.27) vont permettre le calcul des seiches point par point; la valeur de la dénivellation ζ initiale, c'est-à-dire existant dans la « tranche » avoisinant la rive qui sert de point de départ, est choisie arbitrairement.

A la valeur propre λ on attribue une valeur d'essai, et celle-ci pourra être considérée comme satisfaisante lorsque $\sum \zeta_k \Delta v_k$, masse d'eau déplacée dans le mouvement oscillatoire en un quart de période, s'annule sur l'autre rive du lac, comme l'impose évidemment la conservation de la masse d'eau en oscillation.

Exemples d'applications numériques.

a) Soit à calculer la période du mode fondamental (antisymétrique) d'un bassin circulaire de profondeur constante.

Données numériques : rayon = 10 km; profondeur = 100 m.

Le problème est résoluble de manière rigoureuse à l'aide des fonctions de BESSEL ⁽⁹⁹⁾; on trouve pour la valeur propre :

$$\mu_1 \equiv \frac{4 \pi^2}{gh_0 T^2} = \frac{3,389}{a^2},$$

a désignant le rayon du bassin, ce qui nous donne dans le cas présent :

$T_1^2 \simeq 0,0118746 \times 10^8 \text{ sec.}^2$ ou $T_1 \simeq 1090 \text{ sec.} = 18 \text{ min. } 10 \text{ sec.}$ Pour le calcul approché à l'aide de la méthode qui vient d'être décrite, divisons le bassin en 10 compartiments, dont les lignes de démarcation sont tracées au juger, orthogonalement au contour.

Afin de mieux pouvoir juger de la stabilité de la méthode, les mesures ont été faites sans grande précision, et l'on a fait les calculs deux fois, d'après deux « cartes » différentes, la seconde étant moins exacte encore que la première. Malgré le petit nombre de compartiments utilisés et le peu de précision des mesures, effectuées à la règle sur les cartes en question, la valeur propre μ_1 obtenue à l'aide de la première « carte » est égale à $3,388/a^2$, soit une valeur pratiquement exacte (moins de 0,03 % d'erreur !); la seconde « carte » (moins bonne que la première) permet encore d'arriver à $\mu_1 = 3,25/a^2$, d'où $T_1 \simeq 1113 \text{ sec.}$, valeur qui ne diffère que de 2 % de la valeur exacte.

Voici les deux « cartes » pour un quart de bassin, et la table de mesures relative à chacune d'elles.

Section n°	Carte I			Carte II		
	Δv	S	$\Delta \bar{\psi}$	Δv	S	$\Delta \bar{\psi}$
	km ²	km ²	km	km ²	km ²	km
1	4,01	0,35	2,29	3,18	0,30	2,120
2	11,74	0,65	2,35	9,56	0,575	2,185
3	17,51	0,85	2,33	15,44	0,77	2,296
4	20,86	0,96	2,30	22,595	0,93	2,658
5	23,45	1,00	2,39	26,724	1,00	2,769
6	23,45	0,96	2,39	26,724	0,93	2,769
7	20,86	0,85	2,30	22,595	0,77	2,658
8	17,51	0,65	2,33	15,44	0,575	2,296
9	11,74	0,35	2,35	9,56	0,30	2,185
10	4,01	0	2,29	3,18	0	2,120

Remarque. — Les Δv et les S ont été mesurés pour un demi-bassin seulement. L'égalité (VI.25) montre que $\bar{\varphi}$ n'en est affecté.

⁽⁹⁹⁾ La solution en est donnée dans LAMB, H., *op. cit.*, § 191, pp. 284 sqq.

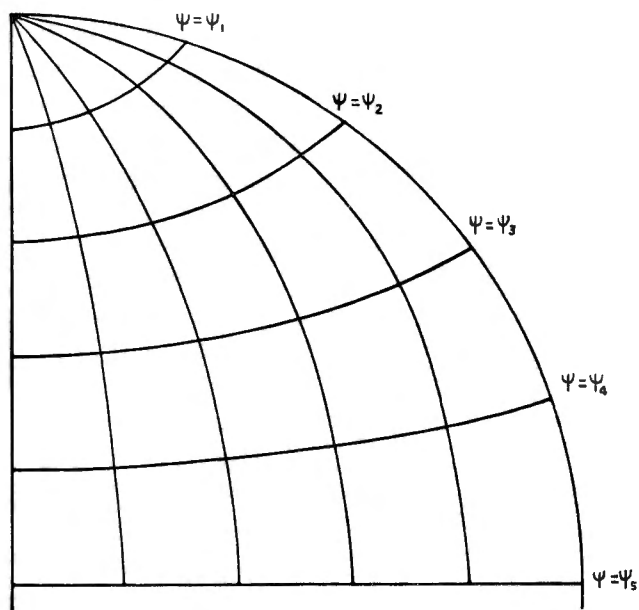


FIG. 35. — Bassin circulaire. Carte I (quart du bassin).

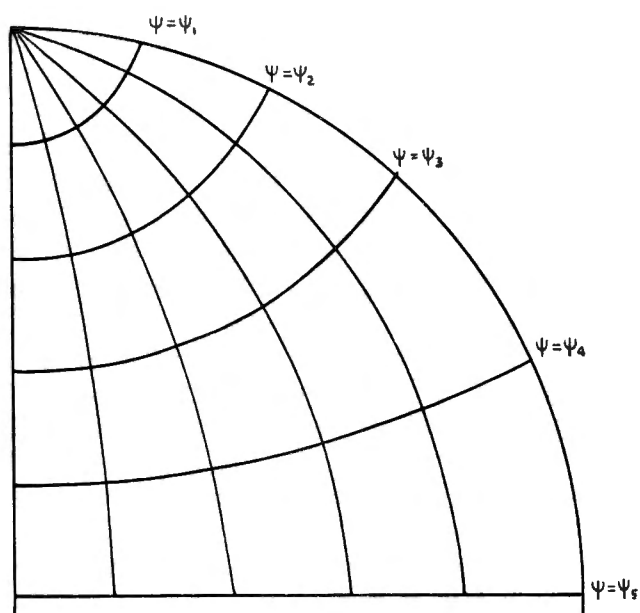


FIG. 36. — Bassin circulaire. Carte II (quart du bassin).

Vérification des mesures : on trouve, pour la carte I, $\frac{1}{2} \sum \Delta v_i = 77,50 \text{ km}^2$; la valeur exacte (= 1/4 surface libre du bassin) est $78,54 \text{ km}^2$, de sorte que l'erreur commise excède à peine 1 %; pour la carte II, on a $\frac{1}{2} \sum \Delta v_i = 77,499 \text{ km}^2$.

Voici les tableaux des calculs effectués respectivement avec $\mu_1 = 3,389/a^2$ (carte I) et $\mu_1 = 3,25/a^2$ (carte II). Les opérations sont menées exactement comme dans la méthode de DEFANT (seiches longitudinales). La valeur $3,388/a^2$ (carte I), est obtenue par extrapolation linéaire, à l'aide d'un essai précédent effectué avec $\mu_1 = 3,39/a^2$.

Notations : u désigne la masse d'eau déplacée, et est égale à $-\sum \zeta_{i-1} \Delta v_i$; $\bar{\Phi} = u \cdot h/S$.

Section n°	ζ cm	u 10^{10} cm^3	$\bar{\Phi}$ 10^7 cm^2	$\Delta \zeta$ cm
Carte I				
1	100,000	401,000	1,1457	- 8,892
2	91,108	1.470,608	2,2625	-18,019
3	73,089	2.750,396	3,2358	-25,551
4	47,538	3.742,039	3,8980	-30,384
5	17,154	4.144,300	4,1443	-33,568
6	- 16,414	3.759,392	3,9160	-31,718
7	- 48,132	2.755,358	3,2416	-25,267
8	- 73,399	1.470,142	2,2618	-17,860
9	- 91,259	398,761	1,1393	- 9,074
10	-100,333	- 3,574	—	—
Carte II				
1	100,000	318,000	1,0600	- 7,303
2	92,697	1.204,276	2,0944	-14,873
3	77,824	2.405,879	3,1245	-23,315
4	54,508	3.637,510	3,9113	-33,788
5	20,721	4.191,258	4,1913	-37,719
6	- 16,998	3.737,003	4,0183	-36,162
7	- 53,160	2.535,853	3,2933	-28,449
8	- 81,609	1.275,810	2,2188	-16,557
9	- 98,166	337,245	1,1242	- 7,983
10	-106,149	- 0,309	—	—

Le graphique ci-après montre l'allure des solutions construites point par point par la méthode qui vient d'être utilisée. Les niveaux ζ les plus bas en valeur absolue sont ceux trouvés en utilisant la carte I; les plus élevés en valeur absolue correspondent à l'emploi de la carte II. La courbe continue représente

la solution exacte, la fonction de BESSEL $J_1(\psi)$, le milieu du bassin étant pris comme origine, et la distance ψ , mesurée le long du diamètre perpendiculaire au diamètre nodal, comme argument.

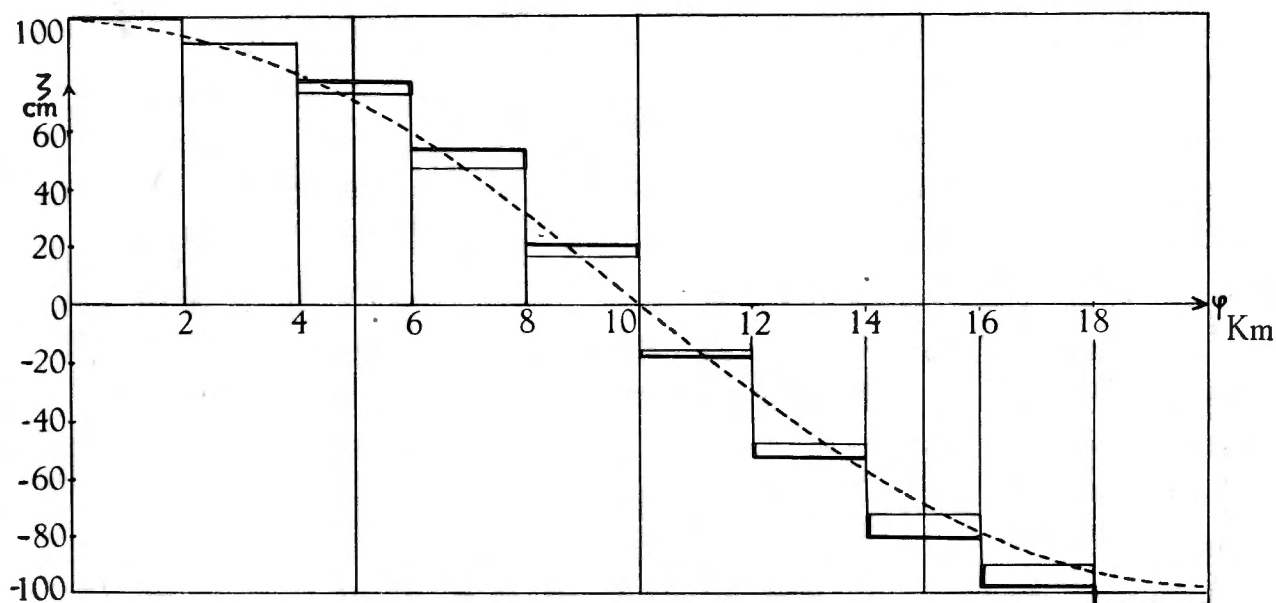


FIG. 37. — Bassin circulaire de profondeur constante.

Distribution des amplitudes de l'oscillation libre fondamentale le long du diamètre de dénivellation maxima.

b) Soit ensuite à calculer le mode fondamental d'un bassin circulaire, de profondeur variable, donnée en coordonnées polaires par $h(r) = h_0 (1 - r^2/a^2)$. Le problème des oscillations libres d'un tel bassin admet des solutions exactes de forme hypergéométrique; l'emploi des coordonnées polaires (r, θ) permet la séparation des variables, et l'on trouve, pour le fondamental, qui seul nous intéresse ici: $\zeta = (r/a) \sin \theta$ (à un facteur constant près, et le facteur périodique $e^{i\omega t}$ étant sous-entendu). La valeur propre correspondante est $\mu_1 = 2/a^2$ ⁽¹⁰⁰⁾.

La surface libre de l'eau en oscillation suivant ce mode est donc plane, exactement comme dans le cas du fondamental du lac parabolique de largeur constante.

Il s'ensuit que les lignes où ζ est constant sont des droites parallèles au diamètre nodal, droites qui ne sont évidemment pas orthogonales au rivage du lac ni aux courbes isobathes (cercles concentriques au rivage).

⁽¹⁰⁰⁾ Cf. LAMB, H., *op. cit.*, § 193, pp. 291 sqq.

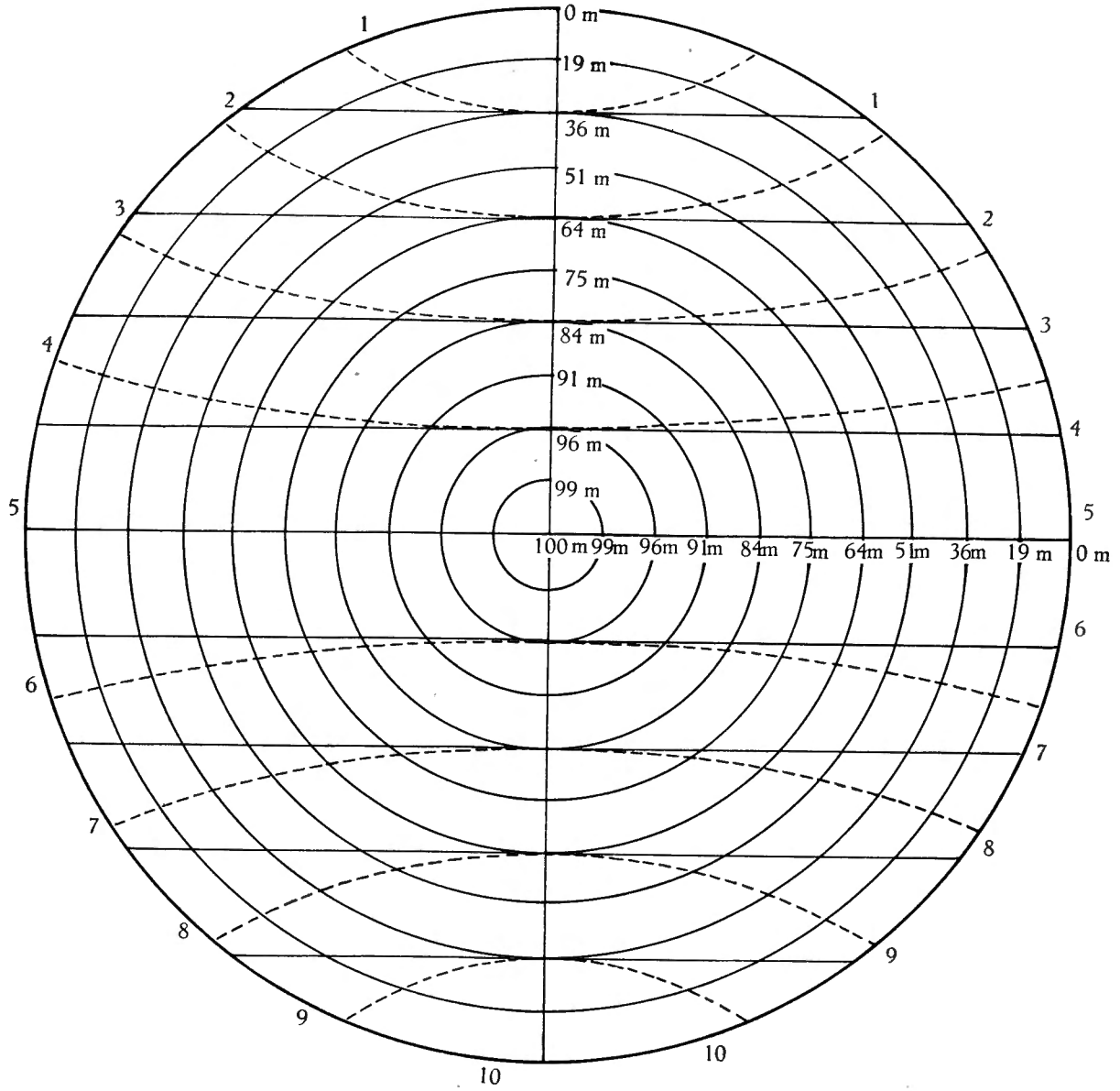


FIG. 38. — Bassin circulaire, de profondeur $h(r) = h_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$.
 $h_0 = 100$ m, $a = 10$ km. Échelle 1/100.000^e
 (pour les courbes en trait ininterrompu, cf. p. 200)

La carte ci-dessus représente le bassin en question, à l'échelle de 1/100.000^e; on a pris comme données numériques : rayon $a = 10$ km; $h_0 = 100$ m.

Les isobathes sont tracées de km en km, et les profondeurs correspondantes sont indiquées à proximité.

En vue du calcul numérique, le bassin a été divisé en dix compartiments, séparés par des droites parallèles équidistantes (2 km d'intervalle).

Mesures bathymétriques.

Section n°	Δv km ²	S km ²	Section n°	Δv km ²	S km ²
1	16,50	0,2832	6	39,60	1,2544
2	27,90	0,6827	7	38,00	1,0304
3	34,40	1,0304	8	34,40	0,6827
4	38,00	1,2544	9	27,90	0,2832
5	39,60	1,3333	10	16,50	0

Vérifications : $\Sigma \Delta v_i = 312,80$ km² (au lieu de la valeur exacte 314,16 km², soit une erreur inférieure à 0,44 %).

Les S sont calculés à l'aide de la formule donnant l'aire d'un segment parabolique comme égale aux $\frac{2}{3}$ de l'aire du rectangle de même base et de même hauteur.

Voici le tableau des calculs effectués avec la valeur d'essai $\mu_1 = 1,986 \times 10^{-12}$ cm⁻² (valeur exacte : $\mu_1 = 2 \times 10^{-12}$ cm⁻², c'est-à-dire $T_1 = 1.418,5$ sec. = 23 min. 38,5 sec.).

Section n°	ζ cm	u 10 ¹⁰ cm ³	φ 10 ² cm	$\Delta\zeta$ cm
1	100,000	1.650,000	58,262	-23,142
2	76,858	3.794,338	55,578	-22,076
3	54,782	5.678,839	55,113	-21,891
4	32,891	6.928,697	55,235	-21,939
5	10,952	7.362,962	55,219	-21,933
6	-10,981	6.928,114	55,230	-21,937
7	-32,918	5.677,230	55,097	-21,885
8	-54,803	3.792,007	55,544	-22,062
9	-76,865	1.647,474	58,174	-23,107
10	-99,972	- 2,064	—	—

Un essai semblable, effectué avec $\mu_1 = 1,99 \times 10^{-12}$ cm⁻², avait laissé un « résidu » de $u_{10} = -21,378 \times 10^{10}$ cm³; $\mu_1 = 1,98 \times 10^{-12}$ cm⁻² conduit à $u_{10} = 26,965 \times 10^{10}$ cm³. La précision atteinte est donc largement satisfaisante : l'écart entre la valeur trouvée et la valeur exacte de μ_1 est de -0,7 % seulement. Quant à l'erreur sur la période ($T_1 = 1.423,5$ sec. au lieu de 1.418,5 sec.), elle n'atteint que 0,35 %.

Il faut remarquer cependant que le calcul ci-dessus a été effectué avec une division en compartiments conforme à la solution exacte, connue à l'avance, à savoir une solution où le profil de la surface libre reste plan.

Ce profil plan est retrouvé de manière très satisfaisante dans la table ci-dessus ($\Delta\zeta$ est à peu près constant).

Voyons à présent ce qui se passerait si l'on ignorait la forme du profil de l'eau en oscillation. Dans ce cas, il serait assez naturel d'entreprendre le calcul avec des compartiments séparés par des sections approximativement orthogonales au rivage du lac, par exemple celles tracées en trait interrompu sur la carte donnée plus haut. Le profil ainsi obtenu ne sera plus plan, mais il est intéressant de voir si la période obtenue de cette manière s'écarte notablement de la valeur exacte.

Mesures bathymétriques.

Section n°	Δv km ²	S km ²	$\Delta\bar{\psi}$ km	Section n°	Δv km ²	S km ²	$\Delta\bar{\psi}$ km
1	11,50	0,2064	2,30	6	48,40	1,2416	2,46
2	23,80	0,5888	2,08	7	38,80	0,9744	2,10
3	34,80	0,9744	2,23	8	34,80	0,5888	2,23
4	38,80	1,2416	2,10	9	23,30	0,2064	2,08
5	48,40	1,3333	2,46	10	11,50	0	2,30

Vérification : $\Sigma \Delta v_i = 313,60$ km² (au lieu de la valeur exacte 314,16 km², soit moins de 0,18 % d'erreur).

$\Delta\bar{\psi}$, distance moyenne entre deux courbes $\psi = \text{constante}$, a été pris variable et calculé à l'aide des Δv , au lieu d'être pris constant, comme ç'aurait été le cas si on l'avait mesuré le long du « Talweg » (ici, le diamètre perpendiculaire au diamètre nodal). Voici la table des résultats que l'on trouve en prenant $\mu_1 = 1,95 \times 10^{-12}$ cm⁻² ($T_1 = 1.436,6$ sec.).

Section n°	ζ cm	u 10 ¹⁰ cm ³	$\bar{\psi}$ 10 ² cm	$\Delta\zeta$ cm
1	100,000	1.150,000	55,717	-24,989
2	75,011	2.897,756	49,214	-19,961
3	55,050	4.813,496	49,400	-21,482
4	33,568	6.115,934	49,258	-20,171
5	13,397	6.764,349	50,734	-24,337
6	-10,940	6.234,853	50,216	-24,089
7	-35,029	4.875,728	50,038	-20,491
8	-55,520	2.943,667	49,994	-21,740
9	-77,260	1.143,509	55,403	-22,471
10	-99,731	- 3,397	—	—

L'inspection de ζ et des $\Delta\zeta$ montre que le profil n'est pas plan, et que la symétrie autour du diamètre nodal n'est qu'approximative; néanmoins, la valeur de μ_1 est bonne (2,5 % d'erreur seulement), alors que les compartiments

utilisés diffèrent notablement des compartiments « exacts »; l'erreur sur la période fondamentale n'est que de 1,3 % environ.

La stabilité de la méthode s'avère ainsi remarquable, puisque de grossières inexactitudes dans le tracé des sections (lignes d'égale dénivellation ζ) n'ont qu'une influence très faible sur la période obtenue, et ceci malgré le petit nombre de divisions utilisées.

CHAPITRE II.

LES SEICHES TRANSVERSALES DU LAC DE GENÈVE.

Comme pour l'étude des seiches longitudinales, le lac de Genève servira cette fois-ci encore de lac-témoin; les présents calculs ont surtout pour but de montrer le degré de précision avec lequel les méthodes décrites dans le chapitre précédent permettent de retrouver les résultats expérimentaux, établis par les observations, en même temps que d'éprouver la valeur pratique des différentes méthodes.

§ 1. RÉSULTATS DES OBSERVATIONS.

Les seiches transversales s'observent principalement dans deux régions du Grand-Lac : la partie sud-ouest de celui-ci, qui sera désignée pour la facilité sous le nom de « région Rolle-Thonon », et la partie centrale, appelée désormais « région Morges-Évian ».

Les seiches de la première région ont été observées depuis très longtemps; déjà F. A. FOREL ⁽¹⁰¹⁾, en 1891, considère leur existence comme bien établie et leur attribue une période d'environ sept minutes. Ceci est pleinement confirmé par des observations modernes : des enregistrements limnographiques, effectués en juillet-août 1950 et que le Service Fédéral des Eaux à Berne a bien voulu nous communiquer, montrent clairement l'existence d'une seiche transversale, de période voisine de sept minutes, dans toute la région depuis Saint-Sulpice jusqu'à Rolle; les observations manquent cependant, d'une part entre la ligne Cully-Méillerie et Saint-Sulpice, et d'autre part entre la ligne Coppet-Hermance et Rolle. Les dénivellations paraissant en phase à Saint-Prex et à Thonon, il y a lieu de croire qu'il s'agit d'une uninodale transversale possédant au moins un nœud longitudinal.

Quant aux seiches du renflement Morges-Évian, leur existence était elle aussi déjà bien connue de F. A. FOREL ⁽¹⁰²⁾ qui leur attribuait une période

⁽¹⁰¹⁾ FOREL, F. A., *Le Léman*, II, p. 107.

⁽¹⁰²⁾ ID., *ibid.*

voisine de 10 min. 18 sec.; ceci également est confirmé par les observations plus récentes. Outre les seiches de Rolle-Thonon et de Morges-Évian, de périodes respectives de 7 min. et de 10,3 min., on connaît encore des seiches plus locales et de périodes plus courtes. C'est ainsi par exemple que l'examen des limnogrammes du Service Fédéral des Eaux décèle l'existence, entre Cully et Meillerie, d'une seiche de période voisine de 5,3 min., qui est peut-être la même que celle, de période identique, signalée par F. A. FOREL ⁽¹⁰³⁾ comme « irrégulière et rare » entre Morges et Évian. Sur les mêmes enregistrements on relève encore des oscillations de très courte période et de très faible amplitude, se manifestant sous forme d'une très fine dentelure le long des courbes, à Rolle, Hermance, Coppet, Bellevue, Cully, Chillon, Saint-Sulpice; les périodes vont de 1,5 à 3,0 min. environ, et l'amplitude est de l'ordre de quelques millimètres.

Les données d'observation dont nous disposons pour le moment étant insuffisantes pour entreprendre l'étude détaillée de ces seiches locales, et le but du présent chapitre étant seulement de vérifier la précision et la stabilité de nos méthodes de calcul, il paraît inutile de nous occuper davantage de ces seiches locales de courte période. Nous nous bornerons donc à l'étude des deux « grandes » seiches de Rolle-Thonon et de Morges-Évian.

§ 2. RECHERCHE THÉORIQUE DES ZONES OÙ LES SEICHES TRANSVERSALES PEUVENT APPARAÎTRE.

On a exposé plus haut (pp. 182 sqq.) comment, à l'aide d'une profondeur « réduite » $H(x)$ (voir définition p. 182) — ou, plus simplement, à l'aide de la profondeur moyenne $\bar{h}(x) \equiv S(x)/b(x)$ — il suffit de construire la courbe d'abscisse x et d'ordonnée $\pi^2 H(x)/b^2(x)$, ou $\pi^2 \bar{h}(x)/b^2(x)$, pour repérer les régions où peuvent apparaître des seiches transversales : ces régions sont celles où la fonction accuse un minimum; en effet, c'est seulement autour des minima de celle-ci que l'expression $\omega^2/gH(x) - r^2\pi^2/b^2(x)$ ou $\omega^2/g\bar{h}(x) - r^2\pi^2/b^2(x)$ pourra être positive (ω^2 étant convenablement choisi), rendant ainsi $w(x)$, amplitude de la seiche, oscillante autour des minima et exponentielle amortie « loin » de ceux-ci : c'est ce qui résulte de l'étude de l'équation

$$w'' + \left[\frac{\omega^2}{g\bar{h}(x)} - \frac{r^2\pi^2}{b^2(x)} \right] w = 0, \quad (\text{VI.14})$$

utilisée dans la théorie des seiches transversales (cf. pp. 182 sqq.).

⁽¹⁰³⁾ *Id.*, *op. cit.*, II, p. 150.

Voici d'abord une table des données numériques utilisées dans le présent chapitre, du moins pour la solution de l'équation en w ci-dessus (VI.14). Les sections transversales sont les mêmes que celles employées pour le calcul des seiches longitudinales; rappelons qu'elles sont numérotées d'est en ouest. La comparaison avec la table des pages 91-92 fera apercevoir des différences pour les valeurs de $b(x)$ aux sections n^{os} 1, 2, 11, 16, 18, 21, 22 : les régions « rognées » pour l'étude des seiches longitudinales ont été rétablies pour le calcul des seiches transversales, ainsi qu'il était naturel de le faire. Quant à la profondeur réduite H , elle a été calculée selon le procédé préconisé page 182.

Lac de Genève. Données numériques.

Section n ^o	Δx	x	$\bar{h}(x)$	$b(x)$	$\pi^2/b^2(x)$	$\pi^2\bar{h}/b^2$	$H(x)$	π^2H/b^2
	km	km	m	km	10^{-10} cm^{-2}	10^{-8} cm^{-1}	m	10^{-8} cm^{-1}
1	1,5	1,5	49	3,6	0,7615	37,31	46	35,03
2	3	4,5	87	5,6	0,3147	27,38	83	26,12
3	3	7,5	153	7,8	0,1622	24,82	168	27,25
4	3	10,5	193	8,9	0,1246	24,05	221	27,54
5	3	13,5	225	8,0	0,1542	34,69	234	36,08
6	3	16,5	238	8,7	0,1304	31,04	267	34,82
7	3	19,5	236	10,0	0,0987	23,29	282	27,83
8	3	22,5	239	11,0	0,0816	19,50	282	23,01
9	3	25,5	223	12,1	0,0674	15,03	260	17,52
10	3	28,5	225	11,9	0,0697	15,68	268	18,68
11	3	31,5	189	13,8	0,0504	9,526	213	10,74
12	3	34,5	177	10,1	0,0968	17,13	177	17,13
13	3	37,5	173	10,1	0,0968	16,75	205	19,84
14	3	40,5	134	10,9	0,0831	11,14	162	13,46
15	3	43,5	105	12,1	0,0674	7,077	126	8,492
16	3	46,5	68	12,4	0,0642	4,366	78	5,008
17	3	49,5	46	6,3	0,2487	11,44	54	13,43
18	3	52,5	45	4,4	0,5098	22,94	50	25,49
19	3	55,5	39	4,2	0,5595	21,82	39	21,82
20	3	58,5	42	4,4	0,5098	21,41	49	24,98
21	3	61,5	42	4,2	0,5595	23,50	46	25,74
22	3,1	64,6	39	4,3	0,5338	20,82	51	27,22
23	3	67,6	30	2,2	2,0392	61,18	32	65,25
24	3	70,6	16	3,0	1,0966	17,55	21	23,03
25	3,3	73,9	0	0	—	—	—	—

Les courbes ci-après présentent des minima nettement accusés dans les régions de Saint-Gingolph, Morges et Rolle. Des seiches transversales doivent donc être observables dans ces trois secteurs; dans les pages qui suivent, nous nous occuperons seulement des deux derniers.

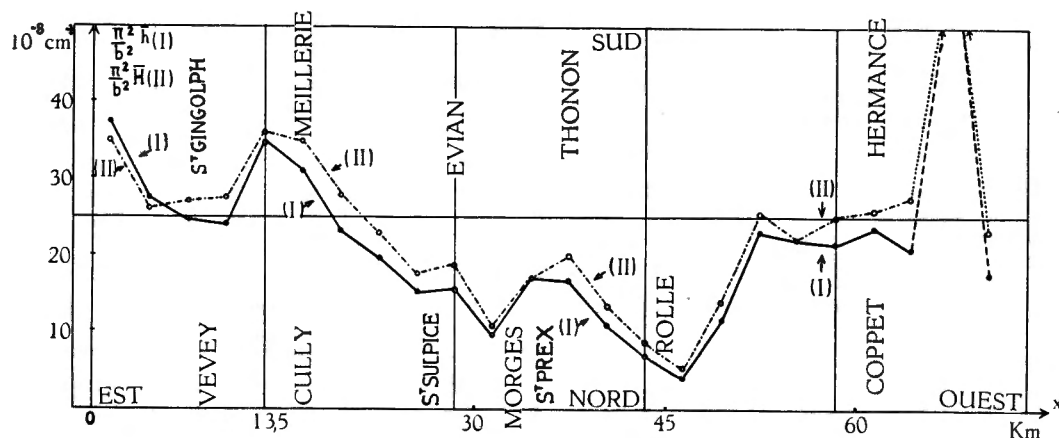


FIG. 39. — Lac de Genève. Recherche des seiches transversales.
 Courbes $\pi^2 \bar{h}/b^2$ et $\pi^2 H/b^2$, dont les minima caractérisent les zones où peuvent apparaître des seiches transversales.

§ 3. CALCUL DES SEICHES PAR LA MÉTHODE DE L'ÉQUATION EN $w(x)$.

Avant d'effectuer des calculs numériques, voyons comment les conditions de lente variation de $b(x)$ et $b'(x)$ ($0x$ étant le Talweg) sont réalisées dans le lac de Genève, en nous bornant ici aux seiches à un seul nœud transversal ($r=1$).

Pour mémoire, rappelons ces conditions :

On doit avoir, pour pouvoir utiliser la méthode de l'équation en $w(x)$:

$$\frac{b'}{b} \text{ et } \frac{b''}{b'} \ll \frac{2\pi}{\Lambda},$$

où Λ = longueur d'onde de la seiche transversale, c'est-à-dire $2b(x)$.

Les conditions ci-dessus peuvent aussi s'écrire :

$$\frac{b'}{b} \ll \frac{2\pi}{\Lambda} \quad \text{et} \quad \frac{b''}{b'} \cdot \frac{b'}{b} \equiv \frac{b''}{b} \ll \frac{4\pi^2}{\Lambda^2},$$

ou, puisque $\Lambda = 2b$:

$$b' \ll \pi \quad \text{et} \quad b'' \ll \pi^2/b.$$

Aux endroits de variation rapide de la largeur (les valeurs de $\Delta b/\Delta x$, $\Delta^2 b/\Delta x^2$ et π^2/b y sont imprimées en italique), les conditions ci-dessus sont mal réalisées. Il faudra donc s'attendre à obtenir par la méthode de l'équation en $w(x)$ des résultats en accord plutôt médiocre avec les données de l'observation.

Table auxiliaire.

Section n°	Δb km	$\Delta b / \Delta x$ nombre pur	$\Delta^2 b$ km	$\Delta^2 b / \Delta x^2$ km ⁻¹	π^2 / b km ⁻¹
0					
1	3,6	[2,400]	-1,6	-0,711	2,47
2	2,0	0,667	0,2	0,022	1,76
3	2,2	0,733	-1,1	-0,122	1,27
4	1,1	0,367	-2,0	-0,222	1,11
5	-0,9	-0,300	1,6	0,178	1,23
6	0,7	0,233	0,6	0,067	1,13
7	1,3	0,433	-0,3	-0,033	0,99
8	1,0	0,333	0,1	0,011	0,90
9	1,1	0,367	-1,3	-0,144	0,82
10	-0,2	-0,067	2,1	0,233	0,83
11	1,9	0,633	-5,6	-0,622	0,72
12	-3,7	-1,233	3,7	0,411	0,98
13	0	0	0,8	0,089	0,98
14	0,8	0,267	0,4	0,044	0,91
15	1,2	0,400	-0,9	-0,100	0,82
16	0,3	0,100	-6,4	-0,711	0,80
17	-6,1	-2,033	4,2	0,467	1,57
18	-1,9	-0,633	1,7	0,189	2,24
19	-0,2	-0,067	0,4	0,044	2,35
20	0,2	0,067	-0,4	-0,044	2,24
21	-0,2	-0,067	0,3	0,033	2,35
22	0,1	0,032	-2,2	-0,229	2,30
23	-2,1	-0,700	2,9	0,322	4,49
24	0,8	0,267	-3,8	-0,422	3,29
25	-3,0	-0,909			

A. Région de Morges-Évian. — Afin de nous assurer si la fonction $w(x)$ présente une allure satisfaisante « loin » de la région où doivent apparaître les seiches, l'intégration de l'équation (VI.14) se fera sur toute la longueur du lac, et l'on emploiera successivement la profondeur « réduite » $H(x)$ et la profondeur moyenne $\bar{h}(x)$. La formule de diffé-

rences finies pour l'intégration numérique de l'équation différentielle est :

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} + \Delta x^2 \cdot w_n'' \quad \text{avec} \quad \Delta x \text{ constant, et } w_k \equiv w(x_k),$$

c'est-à-dire, en éliminant $w''(x)$ à l'aide de l'équation (VI.14) elle-même :

$$w_{n-1} = 2w_n - w_{n+1} + \Delta x^2 \cdot w_n \cdot Q_n,$$

$Q(x)$ désignant l'expression

$$\frac{\pi^2}{b^2(x)} - \frac{\omega^2}{gh(x)},$$

où $h(x)$ représente, suivant les cas, $H(x)$ ou $\bar{h}(x)$.

Les résultats des observations ($T = 10,3$ min.) fournissent une première indication quant aux valeurs de $\omega^2 = 4\pi^2/T^2$ à essayer. Comme on le fait remarquer pp. 183 et 226, chaque essai nécessite la construction d'une nouvelle table de la fonction $Q(x)$.

Voici les résultats des derniers essais, effectués d'abord avec $h(x) = H(x)$, ensuite avec $h(x) = \bar{h}(x)$.

La fonction $w(x)$ a les dimensions physiques d'une longueur; toutefois, le choix de son unité est entièrement libre, et l'on n'a pas à tenir compte des ordres de grandeur de $Q(x)$ ou de la profondeur. C'est ce qui sera rappelé dans les tableaux ci-après par la notation conventionnelle: 10^n cm ($n =$ nombre réel quelconque). Les valeurs initiales de $w(x)$, 0 et 1, sont chaque fois prises arbitrairement (cf. p. 183).

1. $h(x) = H(x)$. Essai avec $T = 604,5$ sec.

Section n°	$\omega^2 / gH(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$w(x)$ 10^n cm
1	—	—	0
2	0,1327	0,1820	1
3	0,0656	0,0966	3,6380
4	0,0499	0,0747	9,4389
5	0,0471	0,1071	21,5856
6	0,0412	0,0892	54,5387
7	0,0391	0,0596	131,2755
8	0,0391	0,0425	278,4285
9	0,0424	0,0250	532,0804
10	0,0410	0,0287	905,4504
11	0,0517	-0,0013	1.512,6982
12	0,0622	0,0346	2.102,2474
13	0,0537	0,0431	3.346,4364
14	0,0680	0,0151	5,888,7081
15	0,0874	-0,0200	9.231,2552

Section n°	$\omega^2 / gH(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$w(x)$ 10^7 cm
16	0,1412	-0,0770	10.912,1764
17	0,2040	0,0447	5.030,9594
18	0,2202	0,2396	1.173,6974
19	0,2824	0,2771	375,5603
20	0,2247	0,2851	514,0330
21	0,2394	0,3201	1.971,4630
22	0,2160	0,3178	—
23	0,3442	1,6950	—
24	—	—	—

Essai avec $T = 604,2 \text{ sec.}$

Section n°	$\omega^2 / gH(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$w(x)$ 10^7 cm
1	—	—	0
2	0,1328	0,1819	1
3	0,0657	0,0965	3,6371
4	0,0499	0,0747	9,4330
5	0,0471	0,1071	21,5707
6	0,0413	0,0891	54,5004
7	0,0391	0,0596	131,1340
8	0,0391	0,0425	278,1079
9	0,0424	0,0250	531,4581
10	0,0411	0,0286	904,3864
11	0,0518	-0,0014	1.510,1038
12	0,0622	0,0346	2.096,7939
13	0,0537	0,0431	3.336,4256
14	0,0681	0,0150	5.870,2568
15	0,0875	-0,0201	9.196,5727
16	0,1413	-0,0771	10.859,2286
17	0,2042	0,0445	4.986,6658
18	0,2205	0,2893	1.111,2627
19	0,2827	0,2768	129,2543
20	0,2249	0,2849	-530,7558
21	0,2396	0,3199	—
22	0,2162	0,3176	—
23	0,3445	1,6947	—
24	—	—	—

La comparaison des dernières valeurs de $w(x)$ de ces deux essais illustre l'extrême sensibilité de la méthode : un écart de 0,3 sec. entre les deux valeurs d'essai de T suffit à modifier considérablement l'allure de la fonction $w(x)$ dans

les dernières divisions du lac (partie sud du Petit-Lac). Il est évidemment superflu de poursuivre les essais, l'amélioration de la période T que l'on obtiendrait ainsi étant entièrement illusoire.

Le graphique ci-dessous montre la distribution de l'amplitude $w(x)$ tout le long du lac. On remarque que le maximum d'amplitude se trouve à une dizaine de km à l'ouest de Morges, ce qui indique un accord plutôt médiocre avec les données expérimentales. La seiche est zéro-nodale longitudinalement et uninodale transversalement.

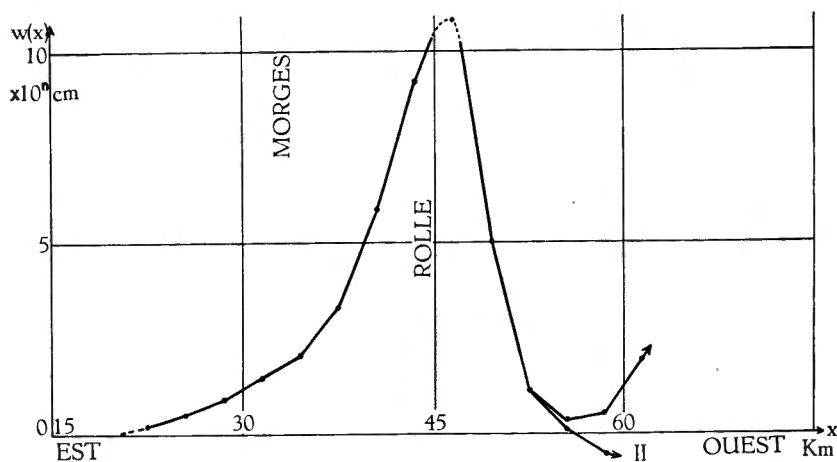


FIG. 40. — Lac de Genève.

Distribution de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale de dix minutes.

Courbe I : $T = 604,5$ sec; courbe II : $T = 604,2$ sec.

[Profondeur réduite : $h(x) = H(x)$.]

2. $h(x) = \bar{h}(x)$. Essai avec $T = 653,0$ sec.

Section n°	$\omega^2 / g\bar{h}(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$w(x)$ 10^6 cm
1	—	—	0
2	0,1085	0,2062	1
3	0,0617	0,1005	3,8558
4	0,0489	0,0757	10,1992
5	0,0420	0,1122	23,4913
6	0,0397	0,0907	60,5049
7	0,0400	0,0587	146,9086
8	0,0395	0,0421	310,9241
9	0,0423	0,0251	592,7487
10	0,0420	0,0277	1.008,4752
11	0,0500	0,0004	1.675,6146

Section n°	$\omega^2 / \bar{gh}(x)$	$Q(x)$	$w(x)$
	10^{-10} cm^{-2}	10^{-10} cm^{-2}	10^n cm
12	0,0533	0,0435	2.348,7862
13	0,0546	0,0422	3.941,5076
14	0,0704	0,0127	7.031,2136
15	0,0899	-0,0225	10.924,5873
16	0,1388	-0,0746	12.605,7321
17	0,2052	0,0435	5.823,3884
18	0,2097	0,3001	1.320,9013
19	0,2420	0,3175	386,0363
20	0,2247	0,2851	554,2695
21	0,2247	0,3348	—
22	0,2420	0,2918	—
23	0,3146	1,7246	—
24	—	—	—

Essai avec $T = 652,7 \text{ sec.}$

Section n°	$\omega^2 / \bar{gh}(x)$	$Q(x)$	$w(x)$
	10^{-10} cm^{-2}	10^{-10} cm^{-2}	10^n cm
1	—	—	0
2	0,1086	0,2061	1
3	0,0618	0,1004	3,8549
4	0,0490	0,0756	10,1931
5	0,0420	0,1122	23,4667
6	0,0397	0,0907	60,4370
7	0,0400	0,0587	146,7420
8	0,0395	0,0421	310,5708
9	0,0424	0,0250	592,0749
10	0,0420	0,0277	1.006,7959
11	0,0500	0,0004	1.672,5111
12	0,0534	0,0434	2.344,2473
13	0,0546	0,0422	3.931,6465
14	0,0705	0,0126	7.012,2850
15	0,0900	-0,0226	10.888,1166
16	0,1389	-0,0747	12.549,3053
17	0,2053	0,0434	5.773,5960
18	0,2099	0,2999	1.253,0533
19	0,2422	0,3173	114,6268
20	0,2249	0,2849	-696,4599
21	0,2249	0,3346	—
22	0,2422	0,2916	—
23	0,3149	1,7243	—
24	—	—	—

Des conclusions analogues à celles de la page 208 se dégagent de la comparaison des valeurs de $w(x)$ obtenues à l'aide des deux dernières valeurs d'essai de T . L'allure générale de la fonction $w(x)$ obtenue en prenant $h(x) = \bar{h}(x)$ ne diffère guère de celle trouvée avec $h(x) = H(x)$, ainsi qu'on peut le voir sur le graphique ci-dessous; notamment, le maximum d'amplitude des seiches concorde à nouveau assez mal avec l'observation.

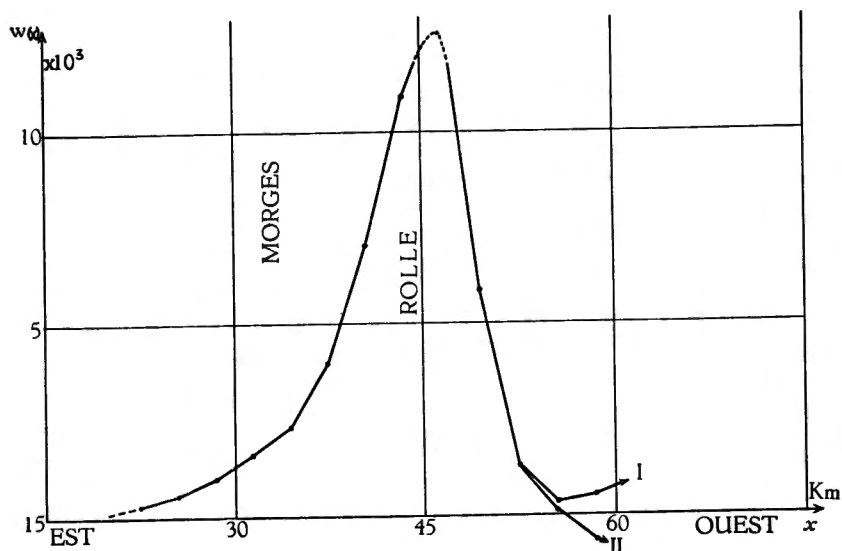


FIG. 41. — Lac de Genève.

Distribution de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale de dix minutes.

Courbe I : $T = 653$ sec; courbe II : $T = 652,7$ sec.

[Profondeur moyenne : $h(x) = \bar{h}(x)$.]

Les périodes obtenues respectivement avec $h(x) = H(x)$ et $\bar{h}(x)$, sont (en chiffres ronds) de 604 et de 653 sec., les écarts par rapport à la période moyenne observée (618 sec.) sont ainsi de $-2,3$ % et $5,7$ % environ. L'emploi de la profondeur réduite fournit donc, du moins dans ce cas-ci, un résultat plus conforme aux données expérimentales.

B. Région de Rolle-Thonon. — Tout comme pour la région de Morges-Évian, l'intégration de l'équation (VI.14) se fera sur toute la longueur du lac, et l'on emploiera à nouveau successivement la profondeur « réduite » $H(x)$ et la profondeur moyenne $\bar{h}(x)$.

La formule de différences finies utilisée est la même que précédemment. Voici les résultats numériques.

1. $h(x) = H(x)$. Essai avec $T = 420$ sec.

Section n°	$\omega^2 / gH(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$w(x)$ 10^2 cm
1	—	—	0
2	0,2748	0,0399	1
3	0,1359	0,0263	2,3591
4	0,1033	0,0213	4,2766
5	0,0975	0,0567	7,0139
6	0,0854	0,0450	13,3304
7	0,0809	0,0178	25,0457
8	0,0809	0,0007	40,7733
9	0,0878	-0,0204	56,7578
10	0,0850	-0,0153	62,3216
11	0,1071	-0,0567	59,3037
12	0,1288	-0,0320	26,0231
13	0,1112	-0,0144	-14,7522
14	0,1408	-0,0577	-53,6156
15	0,1810	-0,1136	-64,6364
16	0,2924	-0,2282	-9,5729
17	0,4225	-0,1738	65,1514
18	0,4562	0,0536	37,9659
19	0,5850	-0,0255	29,0952
20	0,4655	0,0443	13,5472
21	0,4959	0,0636	3,4005
22	0,4474	0,0864	-4,7998
23	0,7130	1,3262	—
24	—	—	—

Essai avec $T = 420,5$ sec.

Section n°	$\omega^2 / gH(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$w(x)$ 10^2 cm
1	—	—	0
2	0,2742	0,0405	1
3	0,1356	0,0266	2,3645
4	0,1030	0,0216	4,2951
5	0,0972	0,0570	7,0596
6	0,0852	0,0452	13,4457
7	0,0807	0,0180	25,3015
8	0,0807	0,0009	41,2561
9	0,0876	-0,0202	57,5449
10	0,0848	-0,0151	63,3720
11	0,1069	-0,0565	60,5868

Section n°	$\omega^2 / gH(x)$	$Q(x)$	$w(x)$
	10^{-10} cm^{-2}	10^{-10} cm^{-2}	10^8 cm
12	0,1285	-0,0317	26,9932
13	0,1109	-0,0141	-14,3016
14	0,1405	-0,0574	-53,7815
15	0,1806	-0,1132	-65,4779
16	0,2917	-0,2275	-10,4654
17	0,4215	-0,1728	65,9750
18	0,4551	0,0547	39,8111
19	0,5836	-0,0241	33,2462
20	0,4643	0,0455	19,4702
21	0,4948	0,0647	13,6672
22	0,4464	0,0874	15,8226
23	0,7113	1,3279	—
24	—	—	—

La conclusion à tirer de la comparaison des fonctions $w(x)$ obtenues par ces deux essais est toujours la même que précédemment : l'extrême sensibilité de la méthode rend illusoire toute amélioration de T à l'aide de nouveaux essais. Le graphique ci-dessous montre que la seiche de sept minutes trouvée ici est binodale longitudinalement; transversalement, elle est uninodale, comme la précédente de 10 minutes. Sa plus grande amplitude se place dans le renflement Rolle-Thonon, bien que son action ne soit nullement négligeable dans la région Morges-Évian.

Pour juger de la conformité de ces résultats avec les données expérimentales, il faudrait pouvoir disposer d'observations plus complètes que celles qui nous ont été communiquées.

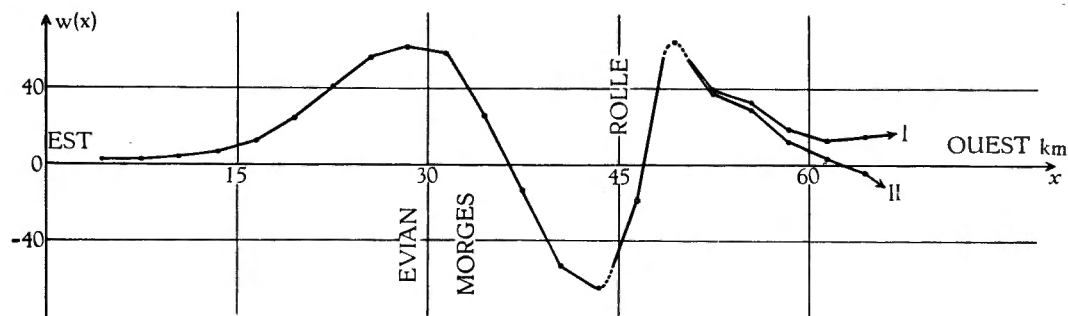


FIG. 42. — Lac de Genève.

Distribution de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale de sept minutes.

Courbe I : T = 420,5 sec; courbe II : T = 420 sec.

[Profondeur réduite : $h(x) = H(x)$.]

2. $h(x) = \bar{h}(x)$. Essai avec $T = 453$ sec.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$w(x)$ 10^2 cm
1	—	—	0
2	0,2254	0,0893	1
3	0,1282	0,0340	2,8037
4	0,1016	0,0230	5,4653
5	0,0872	0,0670	9,2582
6	0,0824	0,0480	18,6338
7	0,0831	0,0156	36,0592
8	0,0821	-0,0005	58,5473
9	0,0879	-0,0205	80,7719
10	0,0872	-0,0175	88,0941
11	0,1038	-0,0534	81,5415
12	0,1108	-0,0140	35,8001
13	0,1134	-0,0166	-14,4521
14	0,1463	-0,0632	-62,5452
15	0,1868	-0,1194	-75,0626
16	0,2884	-0,2242	6,9177
17	0,4263	-0,1776	75,1857
18	0,4358	0,0740	37,1123
19	0,5028	0,0567	23,7557
20	0,4669	0,0429	22,5216
21	0,4669	0,0926	—
22	0,5028	0,0310	—
23	0,6537	1,3855	—
24	—	—	—

Essai avec $T = 452,4$ sec.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$w(x)$ 10^2 cm
1	—	—	0
2	0,2260	0,0887	1
3	0,1286	0,0336	2,7983
4	0,1019	0,0227	5,4428
5	0,0874	0,0668	9,1993
6	0,0826	0,0478	18,4864
7	0,0833	0,0154	35,7263
8	0,0823	-0,0007	57,9179
9	0,0882	-0,0208	79,7446
10	0,0874	-0,0177	86,6431
11	0,1041	-0,0537	79,7394
12	0,1111	-0,0143	34,2976

Section n°	$\omega^2 / g\bar{h}(x)$	$Q(x)$	$w(x)$
	10^{-10} cm^{-2}	10^{-10} cm^{-2}	10^3 cm
13	0,1137	-0,0169	-15,5583
14	0,1467	-0,0636	-63,0478
15	0,1873	-0,1199	-74,4487
16	0,2892	-0,2250	-5,5120
17	0,4275	-0,1788	74,5865
18	0,4369	0,0729	34,6604
19	0,5042	0,0553	17,4750
20	0,4681	0,0417	8,9869
21	0,4681	0,0914	3,8716
22	0,5042	0,0296	1,9411
23	0,6554	1,3838	0,5277
24	—	—	—

Pour les conclusions à tirer de ces deux essais, cf. page 210. Ici encore, l'allure de $w(x)$ est peu affectée par la substitution de $\bar{h}(x)$ à $H(x)$; en ce qui concerne la période, le résultat est nettement meilleur avec la profondeur « réduite » (période pratiquement exacte) qu'avec la profondeur moyenne (erreur d'environ 7,7 % par excès). Le graphique ci-dessous donne les distributions des amplitudes correspondant aux deux derniers essais.

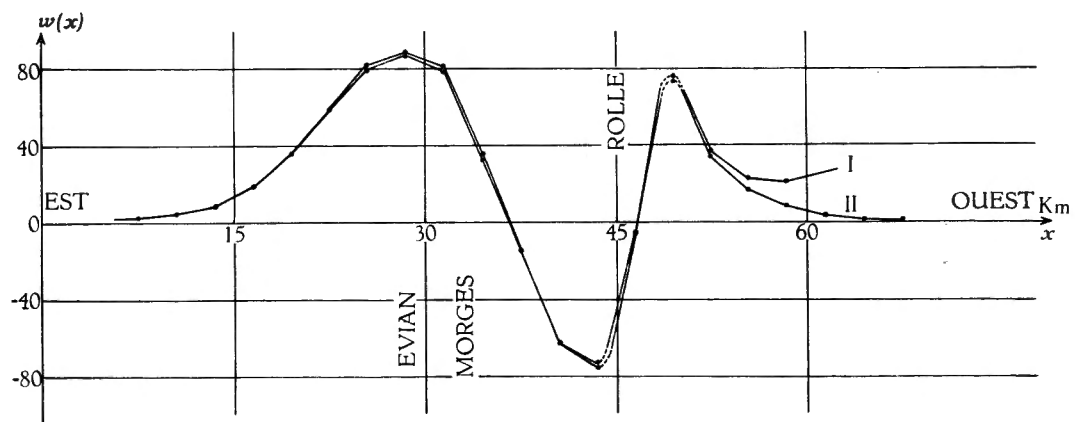


FIG. 43. — Lac de Genève.

Distribution de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale de sept minutes.

Courbe I : $T = 453 \text{ sec}$; courbe II : $T = 452,4 \text{ sec}$.

[Profondeur moyenne : $h(x) = \bar{h}(x)$.]

C. — Les deux seiches qui viennent d'être obtenues en A et B étant respectivement une zéro-nodale et une binodale (longitudinalement), il paraît opportun de compléter cette étude du lac de Genève en recherchant la seiche unino-dale, de période intermédiaire (comprise entre 7 et 10 minutes) et non encore relevée dans les rapports des observateurs. Utilisons à nouveau successivement la profondeur « réduite » $H(x)$ et la profondeur moyenne $\bar{h}(x)$.

Voici les résultats numériques des derniers essais.

1. $h(x) = H(x)$. Essai avec $T = 465,2$ sec.

Section n°	$\omega^2/gH(x)$	$Q(x)$	$w(x)$
	10^{-10} cm^{-2}	10^{-10} cm^{-2}	10^2 cm
1	—	—	0
2	0,2241	0,0906	1
3	0,1107	0,0515	2,8154
4	0,0841	0,0405	5,9357
5	0,0795	0,0747	11,2196
6	0,0697	0,0607	24,0464
7	0,0659	0,0328	50,0097
8	0,0659	0,0157	90,7359
9	0,0716	-0,0042	144,2831
10	0,0694	0,0003	192,3764
11	0,0874	-0,0370	240,9891
12	0,1050	-0,0082	209,3524
13	0,0907	0,0061	162,2655
14	0,1148	-0,0317	124,0870
15	0,1475	-0,0801	50,5065
16	0,2383	-0,1741	-59,4841
17	0,3444	-0,0957	-76,2691
18	0,3719	0,1379	-27,3635
19	0,4769	0,0826	-12,4187
20	0,3796	0,1302	- 6,7060
21	0,4043	0,1552	- 8,8514
22	0,3646	0,1692	(continue à décroître)
23	0,5811	1,4581	—
24	—	—	—

Essai avec $T = 465,1$ sec.

Section n°	$\omega^2/gH(x)$	$Q(x)$	$w(x)$
	10^{-10} cm^{-2}	10^{-10} cm^{-2}	10^2 cm
1	—	—	0
2	0,2241	0,0906	1
3	0,1107	0,0515	2,8154

Section n°	$\omega^2/gH(x)$	$Q(x)$	$w(x)$
	10^{-10} cm^{-2}	10^{-10} cm^{-2}	10^{12} cm
4	0,0842	0,0404	5,9357
5	0,0795	0,0747	11,2142
6	0,0697	0,0607	24,0320
7	0,0660	0,0327	49,9785
8	0,0660	0,0156	90,6337
9	0,0716	-0,0042	144,0139
10	0,0694	0,0003	191,9504
11	0,0874	-0,0370	240,4052
12	0,1051	-0,0083	208,8051
13	0,0907	0,0061	161,6073
14	0,1148	-0,0317	123,2817
15	0,1476	-0,0802	49,7838
16	0,2384	-0,1742	-59,6480
17	0,3445	-0,0958	-75,5637
18	0,3720	0,1378	-26,3284
19	0,4770	0,0825	-9,7456
20	0,3796	0,1302	-0,3989
21	0,4044	0,1551	8,4804
22	0,3647	0,1691	(continue à croître)
23	0,5812	1,4580	—
24	—	—	—

Comme il a été souligné plus haut, l'extrême sensibilité de la méthode rend illusoire toute tentative d'amélioration de T à l'aide de nouvelles interpolations. Les maxima d'amplitude se placent dans le renflement Morges-Évian et à l'entrée du Petit-Lac.

2. $h(x) = \bar{h}(x)$. Essai avec T = 495,3 sec.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}(x)$	$Q(x)$	$w(x)$
	10^{-10} cm^{-2}	10^{-10} cm^{-2}	10^{12} cm
1	—	—	0
2	0,1884	0,1263	1
3	0,1071	0,0551	3,1367
4	0,0849	0,0397	6,8289
5	0,0729	0,0813	12,9611
6	0,0689	0,0615	28,5769
7	0,0695	0,0292	60,0100
8	0,0686	0,0130	107,2137
9	0,0735	-0,0061	166,9614
10	0,0729	-0,0032	217,5429

Section n°	$\omega^2 / \bar{gh}(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$w(x)$ 10^{12} cm
11	0,0867	-0,0363	261,8592
12	0,0926	0,0042	220,6261
13	0,0947	0,0021	187,7327
14	0,1223	-0,0392	158,3874
15	0,1561	-0,0887	73,1630
16	0,2411	-0,1769	- 70,4674
17	0,3563	-0,1076	-101,9067
18	0,3642	0,1456	- 34,6596
19	0,4203	0,1392	- 12,8304
20	0,3902	0,1196	- 7,0751
21	0,3902	0,1693	- 8,9354
22	0,4203	0,1135	- 24,4106
23	0,5463	1,4929	(continue à décroître)
24	—	—	—

Essai avec $T = 495,4$ sec.

Section n°	$\omega^2 / \bar{gh}(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-10} cm^{-2}	$w(x)$ 10^{12} cm
1	—	—	0
2	0,1885	0,1262	1
3	0,1072	0,0550	3,1358
4	0,0849	0,0397	6,8238
5	0,0729	0,0813	12,9499
6	0,0689	0,0615	28,5514
7	0,0695	0,0292	59,9561
8	0,0686	0,0130	107,1173
9	0,0735	-0,0061	166,8112
10	0,0729	-0,0032	217,3472
11	0,0868	-0,0364	261,6236
12	0,0926	0,0042	220,1921
13	0,0948	0,0020	187,0839
14	0,1224	-0,0393	157,3432
15	0,1562	-0,0888	71,9502
16	0,2412	-0,1770	- 70,9454
17	0,3565	-0,1078	-100,8250
18	0,3645	0,1453	- 32,8842
19	0,4205	0,1390	- 7,9461
20	0,3904	0,1194	7,0517
21	0,3904	0,1691	(continue à croître)
22	0,4205	0,1133	—
23	0,5466	1,4926	—
24	—	—	—

Ici encore, il est vain d'espérer améliorer le comportement de la fonction $w(x)$ par interpolation sur les valeurs de T ou de ω^2/g ; les valeurs d'essai sont trop voisines pour que cette amélioration ait un sens.

L'allure générale de la fonction $w(x)$ ne varie guère suivant que l'on prend $h(x) = H(x)$ (profondeur « réduite ») ou $h(x) = \bar{h}(x)$ (profondeur moyenne). L'écart entre les deux périodes est, comme d'habitude, de l'ordre de 6 %; faute de données expérimentales, la période obtenue à l'aide de la profondeur réduite sera présumée la meilleure : $T = 465$ sec. soit 7 min. 45 sec.

Pour terminer, voici les deux graphiques habituels.

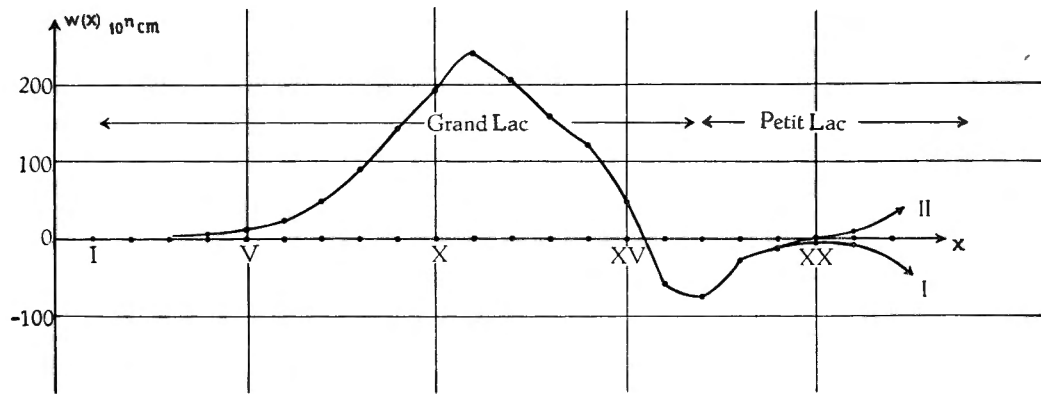


FIG. 44. — Lac de Genève.

Distribution de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale de huit minutes.

Courbe I : $T = 465,2$ sec; courbe II : $T = 465,1$ sec.

[Profondeur réduite : $h(x) = H(x)$.]

N.B. — L'axe des x , au lieu d'être gradué en km, comme d'habitude, porte (accidentellement) les numéros des sections droites, notés en chiffres romains.

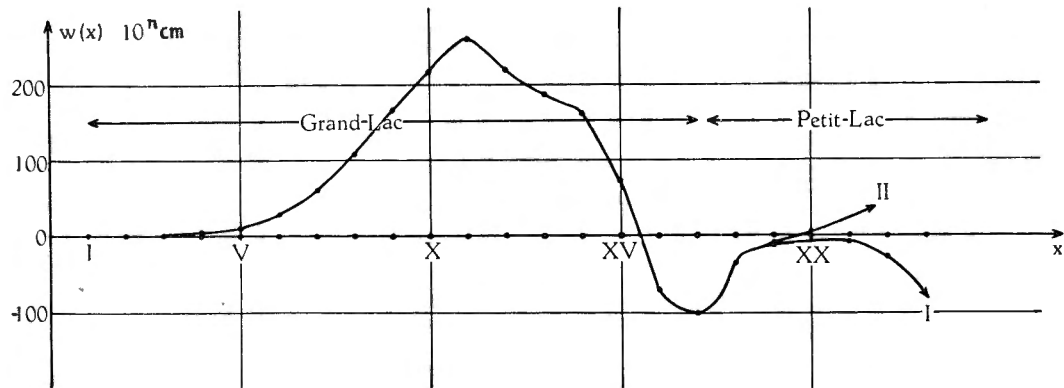


FIG. 45. — Lac de Genève.

Distribution de l'amplitude de la seiche transversale de huit minutes.

Courbe I : $T = 495,3$ sec; courbe II : $T = 495,4$ sec.

[Profondeur moyenne : $h(x) = \bar{h}(x)$.]

N.B. — Même remarque que fig. 44.

**§ 4. CALCUL DES SEICHES
PAR LA NOUVELLE MÉTHODE DES COORDONNÉES
CURVILIGNES.**

A. Région de Morges-Évian. — Afin de nous rendre mieux compte de la stabilité de la méthode, les calculs relatifs à cette portion du lac ont été effectués deux fois, la famille de courbes $\psi = \text{constante}$ étant différente dans les deux cas, ainsi que les limites conventionnelles du bassin censé être affecté par les seiches.

Ainsi qu'il a été expliqué plus haut (cf. p. 190), les familles de courbes $\psi = \text{constante}$ se tracent au juger; elles sont sensiblement orthogonales aux rives du lac et aux limites conventionnelles du bassin étudié. Les résultats pratiques sont fort satisfaisants, comme le montrent les calculs ci-après.

1. A l'aide de la première carte (voir fig. 46). — La portion de lac à étudier a été partagée en 17 compartiments, numérotés du nord au sud. Dans les calculs qui suivent, les compartiments 1 et 2 sont toutefois traités comme n'en formant qu'un seul, ce qui fait que pratiquement il n'y en a que 16.

Les mesures se trouvent reprises dans la table suivante, avec les notations habituelles.

Mesures.

Section n°	Δv km ²	S km ²	$\Delta\bar{\psi}$ km
1,2	5,00	0,183	2,0
3	4,77	0,404	0,9
4	7,95	0,995	1,0
5	9,45	1,786	0,9
6	12,65	2,763	1,0
7	16,06	3,540	1,1
8	15,60	4,365	1,0
9	13,95	4,406	0,9
10	15,30	4,568	1,0
11	14,90	4,316	1,0
12	14,10	3,973	1,0
13	11,97	3,533	0,9
14	12,25	2,720	1,0
15	10,80	1,633	1,0
16	7,06	0,399	0,9
17	5,30	0	1,0

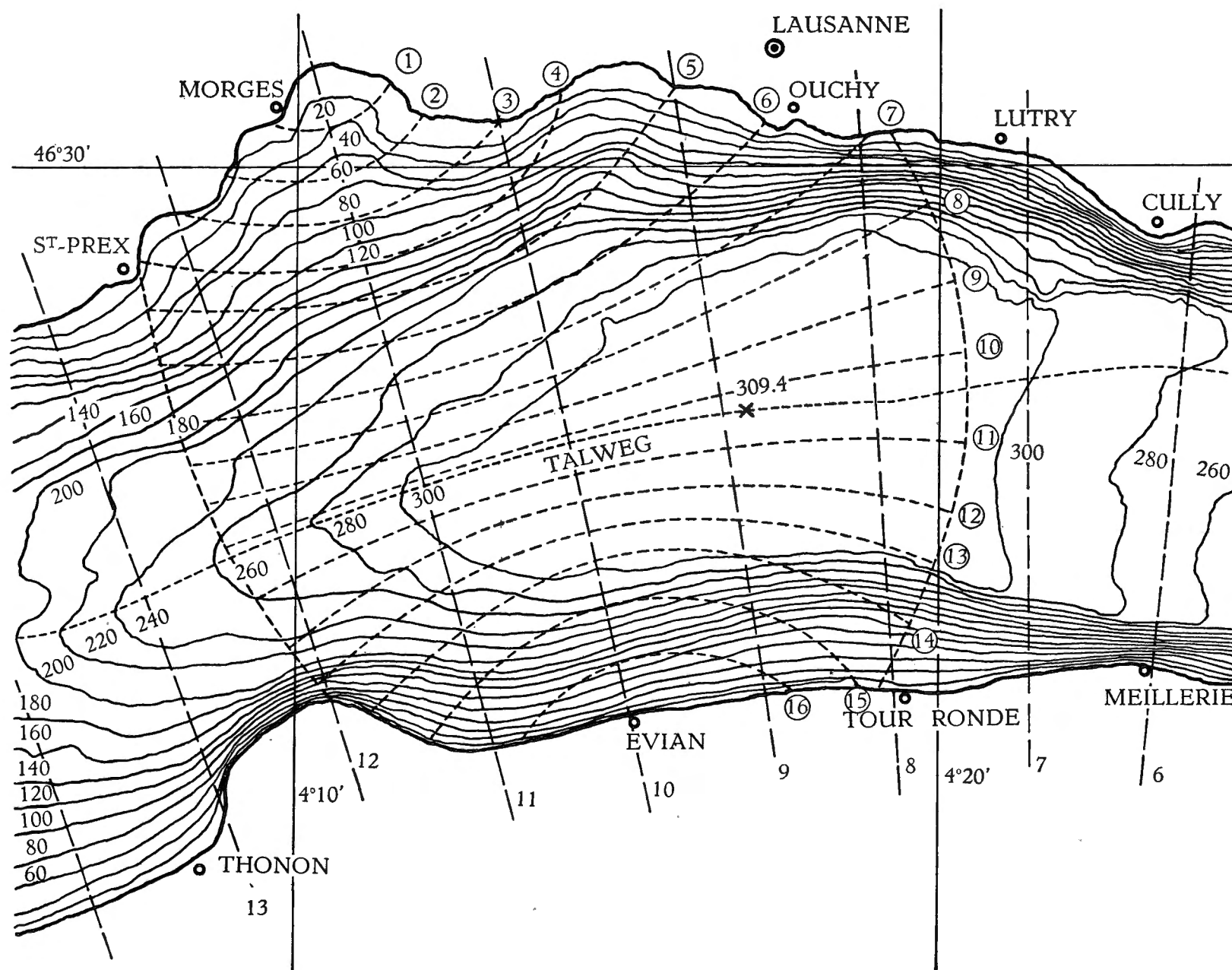


FIG. — 46. — Lac de Genève. Région de Morges-Évian, carte bathymétrique I.

1-16 : Divisions utilisées pour le calcul de la seiche transversale de dix minutes.
 [6-13 : Divisions utilisées pour le calcul des seiches longitudinales, cf. pp. 91 sqq.]

Calcul de la seiche uninodale.

Valeur d'essai : $\lambda_1 = 11,02 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$, c'est-à-dire $T_1 \simeq 604 \text{ sec.}$

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	$\bar{\varphi}$ m	$\Delta\zeta$ cm
1,2	100,000	5,0000	27,322	-60,218
3	39,782	6,8976	17,073	-16,933
4	22,849	8,7141	8,758	- 9,651
5	13,198	9,9613	5,577	- 5,531
6	7,667	10,9312	3,956	- 4,360
7	3,307	11,4623	3,238	- 3,925
8	- 0,618	11,3659	2,604	- 2,870
9	- 3,488	10,8793	2,469	- 2,449
10	- 5,937	9,9709	2,183	- 2,406
11	- 8,343	8,7279	2,022	- 2,228
12	-10,571	7,2374	1,822	- 2,008
13	-12,579	5,7317	1,622	- 1,609
14	-14,188	3,9937	1,468	- 1,618
15	-15,806	2,2867	1,400	- 1,543
16	-17,349	1,0619	2,661	- 2,639
17	-19,988	0,0025	—	—

Le « résidu » u_{17} étant pratiquement nul, il n'y a pas lieu d'améliorer la valeur propre λ_1 par interpolation; le résultat $T_1 = 604 \text{ sec.}$ sera donc considéré comme « exact ». Il est à remarquer que ce résultat est en accord parfait avec celui trouvé par la méthode de l'équation en $w(x)$, la profondeur employée étant la profondeur « réduite » $H(x)$, et s'écarte, comme ce dernier, de 2,3 % seulement du résultat expérimental.

2. A l'aide de la deuxième carte. — Le nombre de compartiments utilisés est de 16, et ils sont à nouveau numérotés du nord au sud (voir fig. 47).

Voici la table de mesures :

Section n°	Δv km ³	S km ²	$\Delta\bar{\psi}$ km
1	3,15	0,099	1,80
2	4,05	0,262	0,92
3	6,12	0,597	0,91
4	9,46	1,305	1,02
5	11,71	2,123	1,01
6	10,68	2,805	0,88
7	11,37	3,281	0,91

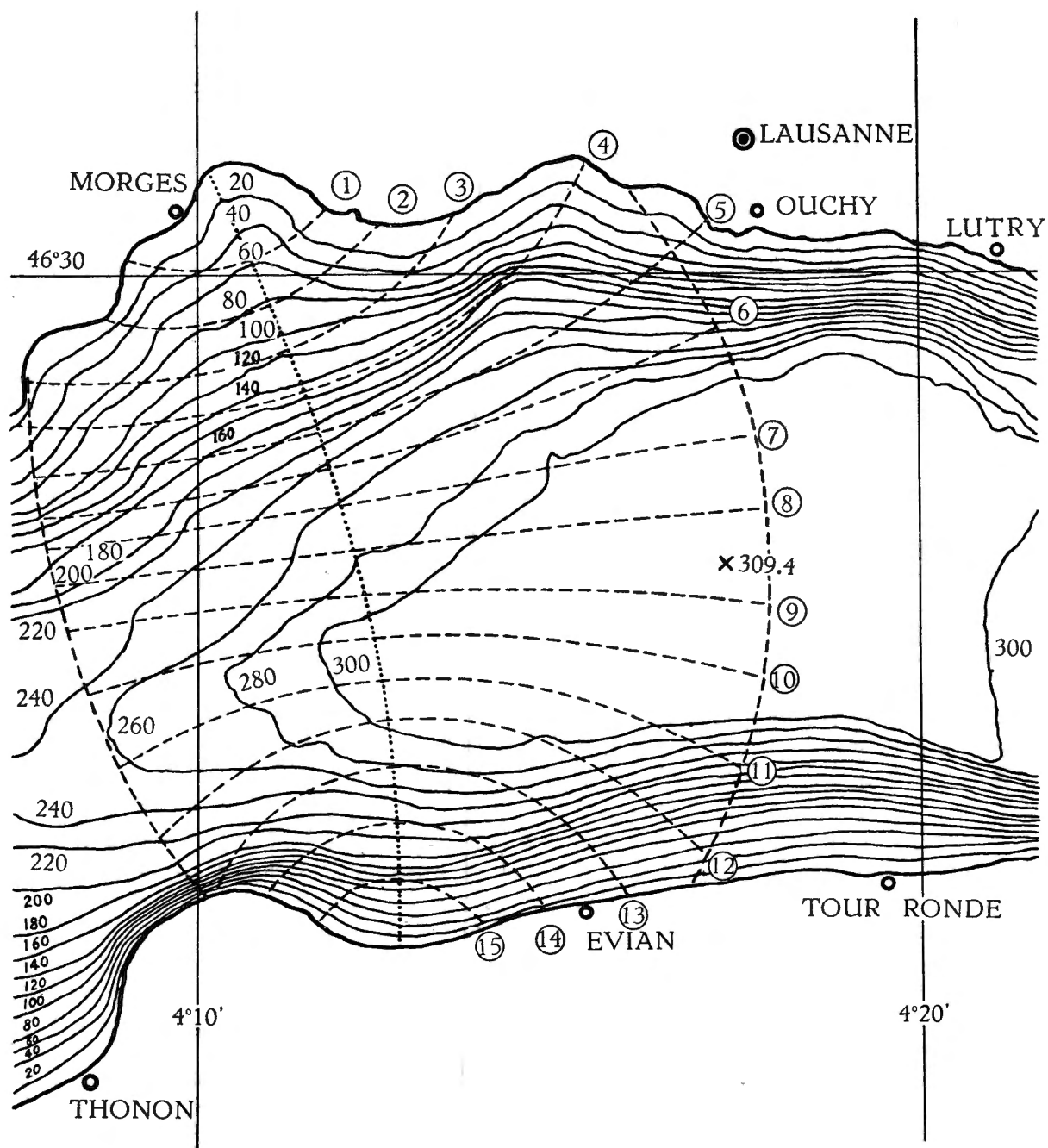


FIG. 47. — Lac de Genève. Région de Morges-Évian, carte bathymétrique II.
 1-15 : Divisions utilisées pour le calcul de la seiche transversale de dix minutes.

Section n°	Δv km ²	S km ²	$\Delta\bar{\psi}$ km
8	10,90	3,399	0,87
9	12,34	3,518	1,00
10	11,08	3,456	0,91
11	11,16	3,272	0,96
12	11,57	2,842	1,10
13	10,15	1,738	1,00
14	7,15	0,864	1,00
15	4,65	0,302	1,00
16	2,20	—	1,26

Calcul de la seiche uninodale.

Valeur d'essai : $\lambda_1 = 1,0783 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$, c'est-à-dire $T_1 = 610,9 \text{ sec.}$

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^2	$\bar{\varphi}$ m	$\Delta\zeta$ cm
1	100,000	3,1500	31,818	-61,756
2	38,244	4,6989	17,935	-17,792
3	20,452	5,9506	9,967	- 9,781
4	10,671	6,9601	5,333	- 5,866
5	4,805	7,5228	3,543	- 3,859
6	0,946	7,6238	2,718	- 2,579
7	- 1,633	7,4381	2,267	- 2,225
8	- 3,858	7,0176	2,065	- 1,937
9	- 5,795	6,3025	1,791	- 1,931
10	- 7,726	5,4465	1,576	- 1,546
11	- 9,272	4,4118	1,348	- 1,395
12	-10,667	3,1776	1,118	- 1,326
13	-11,993	1,9603	1,128	- 1,216
14	-13,209	1,0159	1,176	- 1,268
15	-14,477	0,3427	1,135	- 1,224
16	-15,701	-0,0027	—	—

Le « résidu » u_{16} étant à nouveau pratiquement nul, la période $T_1 \simeq 611 \text{ sec.}$ sera considérée comme « exacte ». Le résultat s'écarte de 1 % environ (par défaut) de celui fourni par l'observation ($T_1 \simeq 618 \text{ sec.}$); les périodes trouvées à l'aide de la première carte et par le procédé de l'équation en $w(x)$ présentent, par rapport aux observations, des écarts absolus du même ordre de grandeur. La stabilité de la méthode paraît clairement illustrée (cf. essais de stabilité similaire, pp. 194-201).

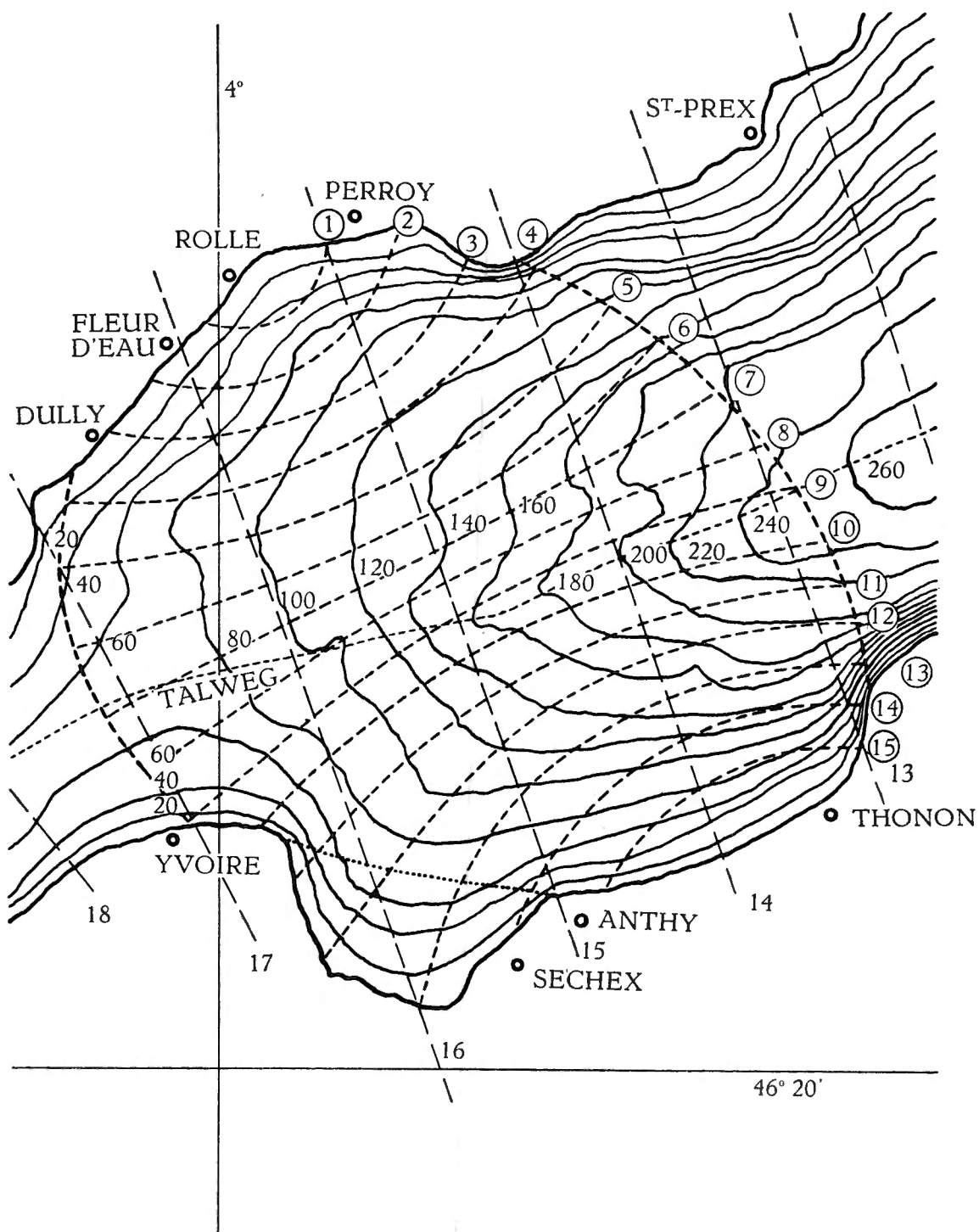


Fig. 48. — Lac de Genève. Région de Rolle-Thonon, carte bathymétrique.

1-15 : Divisions utilisées pour le calcul de la seiche transversale de sept minutes.
 [13-18 : Divisions utilisées pour le calcul des seiches longitudinales, cf. pp. 91 sqq.]

B. Région de Rolle-Thonon. — Le bassin Rolle-Thonon peut être également le siège d'une seiche transversale binodale, d'une période un peu inférieure à sept minutes, ainsi que le montrent les calculs ci-après. La présence d'une seiche d'une telle période dans cette portion du lac était déjà connue de F. A. FOREL, ainsi qu'on l'a fait remarquer page 201, mais la possibilité d'une transversale uninodale, à deux nœuds longitudinaux, de période voisine elle aussi de sept minutes, rend malaisée à débrouiller la question de savoir laquelle de ces deux seiches est celle qui fut observée par FOREL, d'autant plus que le nœud (longitudinal) oriental de la dernière ne se trouve qu'à 4 km environ à l'ouest de Morges.

Faute d'une documentation suffisante sur les observations effectuées sur le lac de Genève (cf. p. 202), nous ne pouvons entreprendre la discussion de ce problème. Il ne nous reste donc qu'à donner les derniers résultats numériques. Tout comme pour le renflement Morges-Évian, on a divisé le bassin de Rolle-Thonon en seize compartiments, numérotés du nord au sud (cf. fig. 48). A titre d'essai de stabilité, les calculs ont été effectués, une première fois en coupant la portion du lac comprise au sud de la ligne Anthy-Yvoire (extrémité sud-ouest du bassin étudié), et une seconde fois en rétablissant cette baie; la différence qui en résulte dans les périodes est de l'ordre de quelques dixièmes de seconde seulement, nouvelle illustration de la grande stabilité du procédé par coordonnées curvilignes.

Dans les tables ci-après, les nombres entre parenthèses, aux divisions 11 à 14, se rapportent aux mesures et calculs où la baie d'Anthy-Yvoire a été rétablie.

Mesures.

Section n°	Δv km ²	S km ²	$\overline{\Delta\psi}$ km
1	1,95	0,083	0,9
2	3,96	0,314	0,9
3	5,40	0,558	0,8
4	7,00	0,866	0,8
5	10,30	1,181	1,0
6	10,00	1,457	0,9
7	9,40	1,619	0,8
8	9,00	1,700	0,7
9	9,80	1,768	0,8
10	9,40	1,754	0,8
11	9,15 (9,55)	1,573 (1,607)	0,8
12	8,00 (9,70)	1,343 (1,418)	0,8
13	7,40 (10,10)	1,093 (1,156)	0,8
14	6,50 (7,80)	0,680 (0,698)	0,8
15	7,00	0,331	0,9
16	5,10	0	0,6

Calcul de la seiche binodale.

Valeur d'essai : $\lambda_2 = 2,50 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$, c'est-à-dire $T_2 = 401 \text{ sec.}$

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	$\bar{\varphi}$ m	$\Delta\zeta$ cm
1	100,000	1,9500	23,494	-52,861
2	47,139	3,8167	12,155	-27,349
3	19,790	4,8854	8,755	-17,510
4	2,280	5,0450	5,826	-11,652
5	-9,372	4,0797	3,454	-8,635
6	-18,007	2,2790	1,564	-3,519
7	-21,526	0,2556	0,158	-0,316
8	-21,842	-1,7102	-1,006	1,760
9	-20,081	-3,6781	-2,080	4,160
10	-15,921	-5,1747	-2,950	5,900
11	-10,021	-6,0916 (-6,1317)	-3,873 (-3,816)	7,746 (7,632)
12	-2,275 (-2,389)	-6,2736 (-6,3634)	-4,671 (-4,488)	9,342 (8,976)
13	7,067 (6,587)	-5,7506 (-5,6981)	-5,261 (-4,929)	10,522 (9,858)
14	17,589 (16,445)	-4,6073 (-4,4154)	-6,775 (-6,326)	13,550 (12,652)
15	31,139 (29,097)	-2,4275 (-2,3786)	-7,334 (-7,186)	16,501 (16,168)
16	47,640 (45,265)	0,0021 (-0,0701)	—	—

Étant donné la très faible valeur du résidu u_{16} , la période $T_2 = 401 \text{ sec.}$ sera considérée comme « exacte ».

Si la seiche calculée est réellement celle observée par F. A. FOREL ($T = 420 \text{ sec.}$ environ), la période peut être considérée comme très satisfaisante (4,5 % d'erreur seulement, par défaut).

§ 5. REMARQUES DIVERSES.

Ainsi qu'on a pu s'en rendre compte, les résultats fournis par la méthode des coordonnées curvilignes sont en général nettement supérieurs à ceux qu'on obtient par intégration de l'équation en $w(x)$; en outre, les calculs sont plus aisés et plus rapides que dans ce dernier procédé : en effet, chaque essai d'une période y nécessite la construction d'une nouvelle table de la fonction $Q(x)$, alors que, dans la méthode des coordonnées curvilignes, la valeur propre d'essai λ s'emploie directement comme facteur (cf. p. 193); la stabilité elle aussi de cette nouvelle méthode est remarquable.

Il a paru inutile de donner, à propos des seiches calculées par la méthode des coordonnées curvilignes, des graphiques représentant les fonctions propres $u(v)$ et les dénivellations ζ ; ils se construisent du reste facilement à l'aide des résultats numériques des pages 219-226. Quant aux vérifications d'orthogonalité des fonctions $u(v)$, il n'a évidemment pas pu en être question, les calculs étant réduits à une seule seiche dans chacun des deux bassins.

L'emploi du procédé de l'équation en $w(x)$ reste instructif et fournit une vérification intéressante des résultats trouvés par l'autre méthode. Dans le cas d'un lac pour lequel on ne possède aucune observation de seiches, il est indispensable, ne fût-ce que pour repérer les zones où l'on doit s'attendre à rencontrer des seiches transversales. C'est ce qui sera illustré dans le prochain chapitre.

CHAPITRE III.

LES SEICHES TRANSVERSALES DU LAC TANGANIKA.

Les données expérimentales faisant totalement défaut pour les seiches transversales du Tanganika (comme du reste pour ses seiches longitudinales), il y a lieu tout d'abord de rechercher les zones du lac où elles pourraient apparaître.

§ 1. RECHERCHE THÉORIQUE
DES ZONES OÙ LES SEICHES TRANSVERSALES
PEUVENT APPARAÎTRE.

Le procédé employé ici est le même que celui utilisé pour le lac de Genève (cf. pp. 202 sqq.); le calcul de la profondeur réduite $H(x)$ (définition, cf. p. 182) nécessitant de très longs calculs préliminaires et n'améliorant que de quelques pour cent les résultats finaux, on a cru bon de se contenter ici d'employer la profondeur moyenne $\bar{h}(x)$ [= $S(x)/b(x)$]; les résultats obtenus par la méthode de l'équation en $w(x)$ seront du reste vérifiés à l'aide de la méthode des coordonnées curvilignes, qui, comme on l'a vu au chapitre précédent, semble fournir habituellement des périodes d'oscillation plus proches des périodes observées.

Voici donc une table des données numériques utilisées dans ce chapitre, du moins pour la solution de l'équation en $w(x)$. Les sections transversales sont les mêmes que celles employées pour le calcul des seiches longitudinales; rappelons qu'elles sont numérotées du nord au sud. Comme pour le lac de Genève, les régions « rognées » pour le calcul des seiches longitudinales ont été rétablies pour l'étude des seiches transversales.

Lac Tanganika. Données numériques.

Section n°	Δx km	x km	$S(x)$ km ²	$b(x)$ km	$\bar{h}(x)$ m	$b^2(x)$ km ²	$\pi^2 \bar{h}/b^2$ 10 ⁻⁷ cm ⁻¹
1	5,5	5,5	2,35	24	98	576	0,1679
2	5	10,5	3,24	25	130	625	0,2053
3	5	15,5	3,31	23	144	529	0,2687
4	5	20,5	3,42	23	149	529	0,2780
5	5	25,5	3,68	21,5	171	462	0,3653

Section n°	Δx km	x km	$S(x)$ km ²	$b(x)$ km	$\bar{h}(x)$ m	$b^2(x)$ km ²	$\pi^2 \bar{h}/b^2$ 10 ⁻⁷ cm ⁻¹
6	5	30,5	4,25	21	202	441	0,4520
7	5	35,5	4,95	24	206	576	0,3520
8	5	40,5	5,45	26	210	676	0,3066
9	5	45,5	5,21	28,5	183	812	0,2225
10	5	50,5	5,68	27,5	207	756	0,2702
11	10	60,5	7,23	31,5	230	992	0,2289
12	11	71,5	8,17	36,5	224	1.332	0,1660
13	4	76,5	4,82	22	219	484	0,4466
14	8	84,5	5,66	27	210	729	0,2843
15	9,5	94	8,84	31,5	281	992	0,2796
16	9,5	103,5	13,25	35	379	1.225	0,3054
17	9	112,5	21,01	39	539	1.521	0,3498
18	9,5	122	23,73	50	475	2.500	0,1875
19	10	132	43,13	49	880	2.401	0,3617
20	10	142	54,51	57,5	948	3.306	0,2831
21	13	155	61,67	55	1.121	3.025	0,3658
22	10	165	64,9	55	1.180	3.025	0,3850
23	11,5	176,5	65,1	55,5	1.173	3.080	0,3758
24	11,5	188	60,3	51	1.182	2.601	0,4485
25	12,5	200,5	62,9	61	1.031	3.721	0,2735
26	11,5	212	59,7	71,5	835	5.112	0,1612
27	10	222	53,4	68	785	4.624	0,1676
28	9,5	231,5	38,5	66	583	4.356	0,1321
29	10	241,5	30,2	63	479	3.969	0,1191
30	9,5	251	37,2	58,5	636	3.422	0,1835
31	10	261	31,6	53	596	2.809	0,2094
32	4	265	30,8	52	592	2.704	0,2160
33	4,5	269,5	28,9	58	498	3.364	0,1461
34	4,5	274	33,9	61	556	3.721	0,1475
35	4	278	34,0	65	523	4.225	0,1222
36	7,5	285,5	31,1	66,5	468	4.422	0,1044
37	7,5	293	26,6	69,5	383	4.830	0,0783
38	5	298	24,1	76,5	315	5.852	0,0531
39	5	303	20,1	77	261	5.929	0,0434
40	1,5	304,5	18,3	73	251	5.329	0,0465
41	3,5	308	24,8	74	335	5.476	0,0604
42	5	313	22,5	75	300	5.625	0,0526
43	5	318	22,7	51	445	2.601	0,1689
44	5	323	22,9	45	509	2.025	0,2481
45	5,5	328,5	21,2	43,5	487	1.892	0,2540
46	5	333,5	20,5	42	488	1.764	0,2730
47	5	338,5	20,4	39	523	1.521	0,3394
48	7	345,5	20,9	41	510	1.681	0,2994
49	7	352,5	27,1	48	565	2.304	0,2420
50	10	362,5	29,4	54	544	2.916	0,1842
51	9,5	372	31,0	51	608	2.601	0,2209
52	5	377	33,1	75	441	5.625	0,0774

Section n°	Δx km	x km	$S(x)$ km ²	$b(x)$ km	$\bar{h}(x)$ m	$b^2(x)$ km ²	$\pi^2 \bar{h}/b^2$ 10 ⁻⁷ cm ⁻¹
53	5	382	34,6	77	449	5.929	0,0747
54	5	387	34,9	79	442	6.241	0,0699
55	5,5	392,5	36,1	79	457	6.241	0,0722
56	5	397,5	34,8	75	464	5.625	0,0814
57	5,5	403	35,0	74	473	5.476	0,0853
58	5	408	33,5	74	453	5.476	0,0816
59	9,5	417,5	30,8	75	411	5.625	0,0721
60	9,5	427	33,3	74	450	5.476	0,0811
61	9,5	436,5	28,9	68,5	422	4.692	0,0887
62	9	445,5	33,3	63	529	3.969	0,1316
63	10	455,5	43,6	61	715	3.721	0,1897
64	10	465,5	48,1	59	815	3.481	0,2310
65	10	475,5	51,4	47	1.094	2.209	0,4887
66	10	485,5	53,5	45	1.189	2.025	0,5795
67	10	495,5	51,2	51	1.004	2.601	0,3810
68	10	505,5	55,6	54	1.030	2.916	0,3486
69	10	515,5	58,0	51,5	1.126	2.652	0,4191
70	9,5	525	57,6	50	1.152	2.500	0,4548
71	10	535	49,4	53,5	923	2.862	0,3183
72	9,5	544,5	42,0	50	840	2.500	0,3316
73	10	554,5	40,0	51	784	2.601	0,2975
74	10	564,5	30,4	43,5	699	1.892	0,3647
75	10	574,5	24,6	41,5	593	1.722	0,3399
76	10	584,5	23,0	43,5	529	1.892	0,2760
77	10	594,5	23,6	44,5	530	1.980	0,2642
78	5	599,5	24,8	48,5	511	2.352	0,2145
79	5	604,5	22,6	58,5	386	3.422	0,1113
80	5,5	610	25,8	69,5	371	4.830	0,0758
81	5	615	20,4	67	304	4.489	0,0668
82	5	620	17,5	50	350	2.500	0,1382
83	5	625	14,7	48,5	303	2.352	0,1271
84	5	630	13,2	46	287	2.116	0,1338
85	5	635	8,90	40,5	220	1.640	0,1324
86	5	640	8,24	39,5	209	1.560	0,1323
87	10	650	5,60	35	160	1.225	0,1289
88	10	660	2,97	32,5	91	1.050	0,0851
89	10,5	670,5	1,50	19	79	361	0,2159
90	11	681,5	0	0	0	0	—

Le graphique ci-dessous montre que la fonction $\pi^2 \bar{h}(x)/b^2(x)$ présente des minima nettement accusés à Rumonge, Nyanza, Albertville, Moba, ainsi qu'au sud de Kala.

L'extrémité nord (région située au nord de Rumonge) présentant une forme très régulière (largeur à peu près constante, fond assimilable à un plan incliné auquel succède un plan horizontal), on se réservera de la traiter à part, suivant

une théorie qui sera exposée dans le prochain chapitre (« shelf-seiches » et « edge-waves » de STOKES). Les quatre autres « bassins », désignés conventionnellement du nom des quatre noms de villes ci-dessus, seront traités dans ce chapitre III successivement par la méthode de l'équation en $w(x)$ et par celle des coordonnées curvilignes.

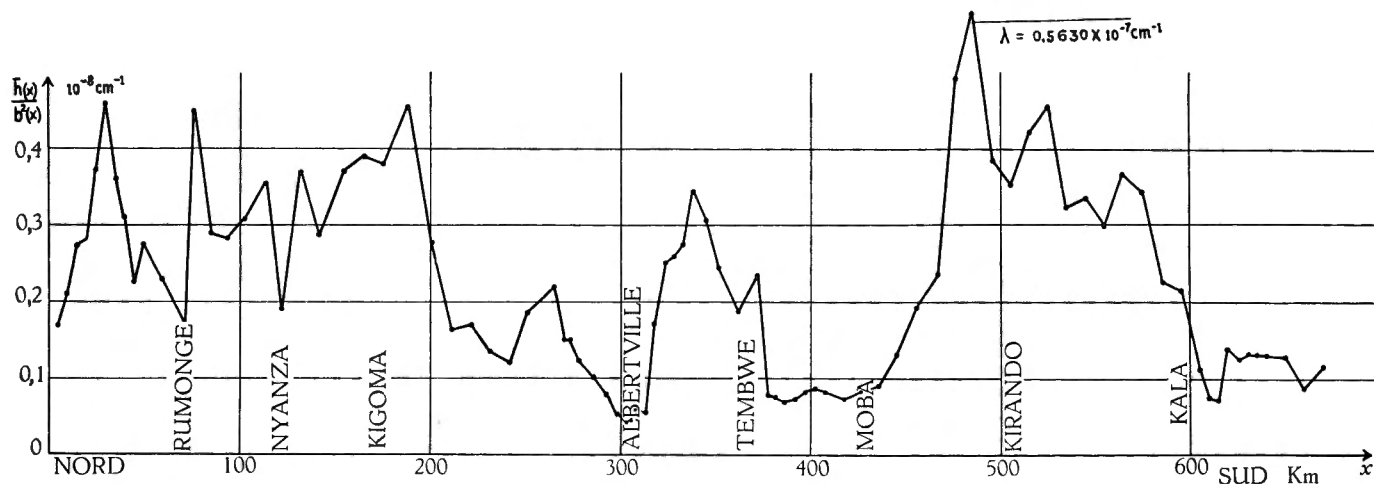


FIG. 49. — Lac Tanganyika. Recherche des zones à seiches transversales.

En ordonnée, au lieu de \bar{h}/\bar{b}^2 en 10^{-8} cm^{-1} , lire $\pi^2 \bar{h}/\bar{b}^2$ en 10^{-7} cm^{-1} .

Avant de passer aux calculs numériques, donnons à nouveau une table permettant de se rendre compte comment les conditions de lente variation de $b(x)$ et $b'(x)$ sont réalisées tout le long du lac (cf. pp. 177, 204). Voici cette

Table auxiliaire.

Section n°	Δb km	$\Delta b / \Delta x$ nombre pur	$\Delta^2 b$ km	$\Delta^2 b / \Delta x^2$ km ⁻¹	π^2 / b km ⁻¹
0	[24]	[4,363]			
1	1,0	0,200	-23,0	-0,760	0,4112
2	-2,0	-0,400	-3,0	-0,120	0,3948
3	0	0	2,0	0,080	0,4291
4	-1,5	-0,300	-1,5	-0,060	0,4291
5	-0,5	-0,100	1,0	0,040	0,4591
6	3,0	0,600	3,5	0,140	0,4700
7	2,0	0,400	-1,0	-0,040	0,4112

Section n°	Δb km	$\Delta b / \Delta x$ nombre pur	$\Delta^2 b$ km	$\Delta^2 b / \Delta x^2$ km ⁻¹	π^2 / b km ⁻¹
8			0,5	0,020	0,3796
9	2,5	0,500	- 3,5	-0,140	0,3463
10	- 1,0	-0,200	5,0	0,200	0,3589
11	4,0	0,400	1,0	0,010	0,3133
12	5,0	0,455	-19,5	-0,161	0,2704
13	-14,5	-2,900	19,5	0,780	0,4486
14	5,0	0,625	- 0,5	-0,0078	0,3655
15	4,5	0,474	- 1,0	-0,0111	0,3133
16	3,5	0,368	0,5	0,0055	0,2820
17	4,0	0,444	7,0	0,0864	0,2531
18	11,0	1,158	-12,0	-0,133	0,1974
19	- 1,0	-0,100	9,5	0,095	0,2014
20	8,5	0,850	-11,0	-0,110	0,1716
21	- 2,5	-0,192	2,5	0,0148	0,1794
22	0	0	0,5	0,0050	0,1794
23	0,5	0,0435	- 5,0	-0,0378	0,1778
24	- 4,5	-0,391	14,5	0,1096	0,1935
25	10,0	0,800	0,5	0,0032	0,1618
26	10,5	0,913	-14,0	-0,1059	0,1380
27	- 3,5	-0,350	1,5	0,0150	0,1451
28	- 2,0	-0,211	- 1,0	-0,01108	0,1495
29	- 3,0	-0,300	- 1,5	-0,0150	0,1567
30	- 4,5	-0,474	- 1,0	-0,0111	0,1687
31	- 5,5	-0,550	4,5	0,045	0,1862
32	- 1,0	-0,250	7,0	0,4375	0,1898
33	6,0	1,333	- 3,0	-0,1481	0,1702
34	3,0	0,667	1,0	0,0494	0,1618
35	4,0	1,000	- 2,5	-0,1562	0,1518
36	1,5	0,200	1,5	0,0267	0,1484
37	3,0	0,400	4,0	0,0711	0,1420
38	7,0	1,400	- 6,5	-0,260	0,1290
39	0,5	0,100	- 4,5	-0,180	0,1282
40	- 4,0	-2,667	5,0	2,222	0,1352
41	1,0	0,286	0	0	0,1334
42	1,0	0,200	-25,0	-1,000	0,1316
42	-24,0	-4,800			

Section n°	Δb km	$\Delta b / \Delta x$ nombre pur	$\Delta^2 b$ km	$\Delta^2 b / \Delta x^2$ km ⁻¹	π^2 / b km ⁻¹
43			18,0	0,720	0,1935
44	- 6,0	-1,200	4,5	0,180	0,2193
45	- 1,5	-0,273	0	0	0,2269
46	- 1,5	-0,300	- 1,5	-0,060	0,2350
47	- 3,0	-0,600	5,0	0,200	0,2532
48	2,0	0,286	5,0	0,102	0,2407
49	7,0	1,000	- 1,0	-0,0204	0,2056
50	6,0	0,600	- 9,0	-0,090	0,1828
51	- 3,0	-0,316	27,0	0,2992	0,1935
52	24,0	4,800	-22,0	-0,880	0,1316
53	2,0	0,400	0	0	0,1282
54	2,0	0,400	- 2,0	-0,0800	0,1249
55	0	0	- 4,0	-0,1322	0,1249
56	- 4,0	-0,800	3,0	0,1200	0,1316
57	- 1,0	-0,182	1,0	0,0331	0,1334
58	0	0	1,0	0,0400	0,1334
59	1,0	0,105	- 2,0	-0,0222	0,1316
60	- 1,0	-0,105	- 4,0	-0,0443	0,1334
61	- 5,5	-0,579	0	0	0,1441
62	- 5,5	-0,611	3,5	0,0432	0,1567
63	- 2,0	-0,200	0	0	0,1618
64	- 2,0	-0,200	-10,0	-0,100	0,1673
65	-12,0	-1,200	10,0	0,100	0,2100
66	- 2,0	-0,200	8,0	0,080	0,2193
67	6,0	0,600	- 3,0	-0,030	0,1935
68	3,0	0,300	- 5,5	-0,055	0,1828
69	- 2,5	-0,250	1,0	0,010	0,1916
70	- 1,5	-0,158	5,0	0,0554	0,1974
71	3,5	0,350	- 7,0	-0,070	0,1845
72	- 3,5	-0,368	4,5	0,0499	0,1974
73	1,0	0,100	- 8,5	-0,0850	0,1935
74	- 7,5	-0,750	5,5	0,0550	0,2269
75	- 2,0	-0,200	4,0	0,0400	0,2378
76	2,0	0,200	- 1,0	-0,0100	0,2269
77	1,0	0,100	3,0	0,0300	0,2218
	4,0	0,800			

Section n°	Δb km	$\Delta b / \Delta x$ nombre pur	$\Delta^2 b$ km	$\Delta^2 b / \Delta x^2$ km ⁻¹	π^2 / b km ⁻¹
78			6,0	<i>0,2400</i>	<i>0,2035</i>
79	10,0	<i>2,000</i>	1,0	0,0400	0,1687
80	11,0	<i>2,000</i>	-13,5	<i>-0,4463</i>	<i>0,1420</i>
81	-2,5	<i>-0,500</i>	-14,5	<i>-0,5800</i>	<i>0,1473</i>
82	-17,0	<i>-3,400</i>	15,5	<i>0,6200</i>	<i>0,1974</i>
83	-1,5	<i>-0,300</i>	-1,0	0,0400	0,2035
84	-2,5	<i>-0,500</i>	-3,0	<i>-0,1200</i>	<i>0,2146</i>
85	-5,5	<i>-1,100</i>	4,5	<i>0,1800</i>	<i>0,2437</i>
86	-1,0	<i>-0,200</i>	-3,5	<i>-0,1400</i>	<i>0,2499</i>
87	-4,5	<i>-0,450</i>	2,0	0,0200	0,2820
88	-2,5	<i>0,250</i>	-11,0	<i>-0,110</i>	<i>0,3037</i>
89	-13,5	<i>-1,286</i>	-5,5	<i>-0,0499</i>	<i>0,5194</i>
90	-19	<i>-1,727</i>			

On voit que les conditions $b' \ll \pi$ et $b'' \ll \pi^2/b$ sont médiocrement réalisées, surtout dans les régions où l'allure de la courbe $\pi^2 \bar{h}/b^2$ fait prévoir l'apparition de seiches transversales : minima accusés aux sections 1-3, 11-14 (Rumonge); 17-19 (Nyanza); 25-29 (mieux !); 31-45 (Albertville); 50-62 (Moba; assez bien); 75-90 (Kala). Les données sont alors imprimées en italique.

Ceci ne rend pas pour autant les résultats numériques qui vont suivre dépourvus de valeur. On a vu, dans le cas du lac de Genève, que les résultats théoriques sont en accord très acceptable avec l'expérience; il ne faut en outre pas perdre de vue que les présents calculs n'ont d'autre but que de guider les observations et de faciliter éventuellement l'interprétation des enregistrements limnographiques.

§ 2. CALCUL DES SEICHES PAR LA MÉTHODE DE L'ÉQUATION EN $w(x)$.

L'emploi de cette méthode nécessite Δx constant, du moins si l'on veut faire usage du très commode schéma d'intégration numérique déjà employé avec succès pour le lac de Genève (cf. pp. 205 sqq.).

C'est pourquoi on introduira de nouvelles divisions, distinctes en principe de celles déjà employées pour le calcul des seiches longitudinales. Afin d'éviter toute confusion, ces nouvelles divisions seront numérotées en chiffres romains, toujours du nord au sud. On les trouvera sur la planche IV.

La conduite du calcul numérique appelle quelques remarques préliminaires.

La condition d'évanescence exponentielle de l'amplitude $w(x)$ ne peut être réalisée dans la pratique que moyennant un ajustement, aussi bien des valeurs (arbitraires) initiales de $w(x)$ que de la valeur propre $\lambda \equiv \omega^2/g$. On ne peut donc plus procéder ici comme dans les cas admettant des solutions exactes, où l'on imposait à $w(x)$ la valeur zéro à l'une des extrémités fermées du lac, et une valeur arbitraire (par exemple l'unité) au point suivant.

Ce procédé est encore applicable lorsque le point initial coïncide avec une extrémité fermée de la masse d'eau et que la largeur du lac est très faible en ce point, ce qui entraîne l'annulation de l'amplitude $w(x)$, comme c'est par exemple le cas pour le lac de Genève, aux extrémités plus ou moins effilées.

Mais, en général, imposer à $w(x)$ d'être nul en un point situé « à quelque distance » d'une région où la théorie prévoit l'apparition de seiches transversales et lui imposer une valeur non nulle en un point voisin, revient à postuler arbitrairement au premier point l'existence d'un nœud longitudinal d'oscillation transversale, ce qui contredirait la condition-frontière exigée.

Pratiquement, on procédera comme suit. On choisit arbitrairement deux points α et β situés dans la zone où l'on s'attend à voir décroître exponentiellement l'amplitude $w(x)$, et le plus loin possible du maximum présumé d'amplitude. On attribue à $w(x)$ en ces points deux valeurs arbitraires $w(\alpha)$ et $w(\beta)$, non nulles et de même signe. On choisit pour λ une valeur de départ convenable, par exemple la valeur propre correspondant au mouvement longitudinal équinoxial de l'eau dans un bassin de profondeur constante égale à la profondeur moyenne de la région où l'amplitude $w(x)$ est théoriquement maximum, et de longueur égale à la largeur du lac en cette région. A partir des valeurs $w(\alpha)$ et $w(\beta)$, on calcule $w(x)$ point par point, dans le sens de la décroissance exponentielle de $w(x)$ et l'on ajuste les deux valeurs $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ jusqu'à ce que $w(x)$ prenne une allure exponentielle amortie satisfaisante. Au cours de ces premiers essais, λ est laissé fixe.

Une fois atteint le résultat désiré, on poursuit le calcul de $w(x)$ en sens opposé, à partir des deux points α et β , et l'on juge du comportement de $w(x)$ dans la région d'amplitude théoriquement maximum et dans la région de décroissance exponentielle située « au-delà » de cette dernière. On ajuste maintenant λ jusqu'à ce que la fonction $w(x)$ présente l'allure voulue. Les légères modifications de λ , qui altèrent profondément l'allure de la fonction au voisinage et au-delà du maximum, n'auront en général qu'une influence pratiquement négligeable sur l'allure de la « queue » exponentielle calculée préalablement. On peut montrer en effet que les variations de $w(x)$ dues à une légère modification de λ s'accroissent rapidement à mesure que le nombre de points considérés augmente, et croissent avec $w(x)$ lui-même; il en résulte une divergence de plus en plus marquée des solutions à mesure que l'on s'éloigne des points α et β dans le sens des $w(x)$ croissants (d'où précisément la sensibilité extrême de la méthode), alors que l'effet est excessivement faible en sens inverse [$w(x)$ petit et nombre de points peu élevé].

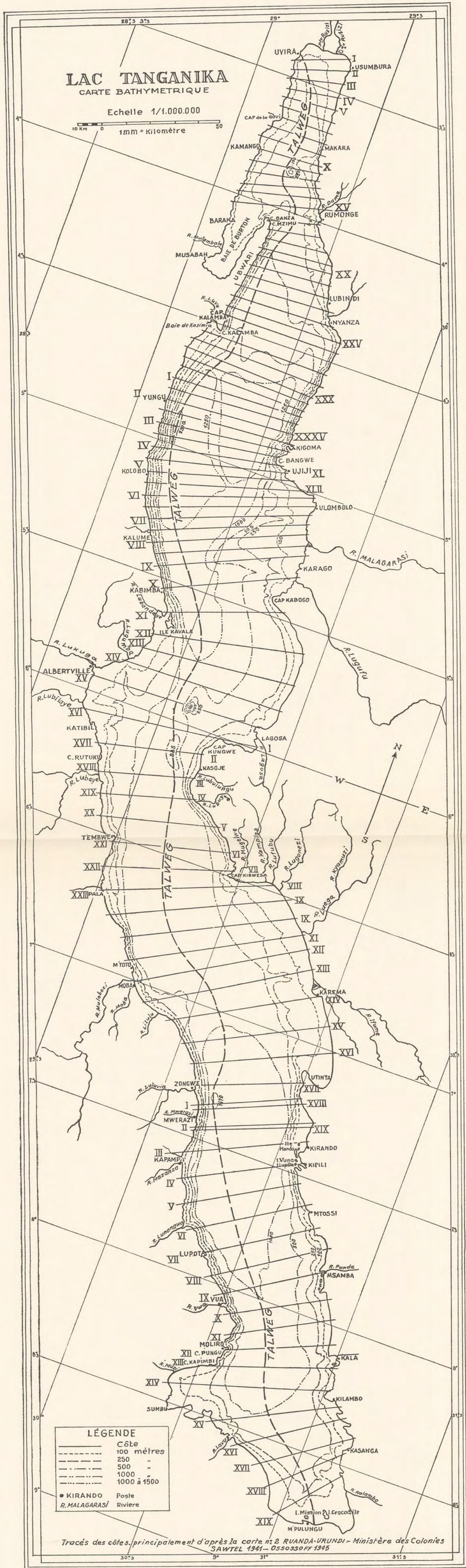


PLANCHE IV. — Lac Tanganika.

Sections transversales utilisées pour le calcul des seiches transversales dans les bassins dits de Nyanza (sect. I-XLII), d'Albertville (sect. I-XXIII), de Moba (sect. I-XIX) et de Kala (sect. I-XIX).

Considérons l'équation

$$w'' + \left[\frac{\omega^2}{gH(x)} - \frac{r^2 \pi^2}{b^2(x)} \right] w = 0,$$

que nous écrirons, comme précédemment (cf. p. 183),

$$w'' - Q(x, \lambda) \cdot w = 0 \quad (1)$$

(où l'on a posé $\lambda = \omega^2/g$). Si l'on modifie légèrement λ , en le remplaçant par $\lambda + \Delta\lambda$, l'équation devient :

$$w'' - Q(\lambda + \Delta\lambda, x) \cdot w = 0,$$

ou encore

$$w'' - [Q(x, \lambda) + \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \Delta\lambda] \cdot w = 0,$$

en remarquant bien que $\frac{\partial Q}{\partial \lambda}$ est fonction de x : $\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = -\frac{1}{H(x)}$, ou enfin

$$w'' - (Q + \delta Q) \cdot w = 0. \quad (2)$$

Si l'on remplace, comme précédemment, w'' par l'expression aux différences finies : $(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) \Delta x^2$, on peut écrire :

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} + \Delta x^2 \cdot w_n \cdot Q_n. \quad (1')$$

Désignons par z les valeurs de w calculées à partir de (2) ; on a de même :

$$z_{n+1} = 2z_n - z_{n-1} + \Delta x^2 \cdot z_n (Q_n + \delta Q_n). \quad (2')$$

Si l'on désigne par les indices $p-1$ et p les valeurs arbitraires initiales retenues finalement pour w aux points d'abscisse α et β , on peut écrire :

$$w_{p+1} = 2w_p - w_{p-1} + \Delta x^2 w_p Q_p; \quad (1'')$$

$$z_{p+1} = 2w_p - w_{p-1} + \Delta x^2 w_p (Q_p + \delta Q_p). \quad (2'')$$

L'écart $z_{p+1} - w_{p+1}$ est donc de

$$\Delta x^2 w_p \delta Q_p.$$

Au point x_{p+2} on a :

$$w_{p+2} = 2w_{p+1} - w_p + \Delta x^2 w_{p+1} Q_{p+1};$$

$$z_{p+2} = 2z_{p+1} - w_p + \Delta x^2 z_{p+1} (Q_{p+1} + \delta Q_{p+1});$$

(puisque $z_p = w_p$), ou, en utilisant (1'') et (2'') :

$$w_{p+2} = 2(2w_p - w_{p-1} + \Delta x^2 w_p Q_p) - w_p + \Delta x^2 (2w_p - w_{p-1} + \Delta x^2 w_p Q_p) Q_{p+1};$$

$$z_{p+2} = 2[2w_p - w_{p-1} + \Delta x^2 w_p (Q_p + \delta Q_p)] - w_p + \Delta x^2 [2w_p - w_{p-1} + \Delta x^2 w_p (Q_p + \delta Q_p)] (Q_{p+1} + \delta Q_{p+1}).$$

Par suite (en négligeant le terme en $\delta Q_p \delta Q_{p+1}$) :

$$z_{p+2} - w_{p+2} = 2\Delta x^2 w_p \delta Q_p + \Delta x^2 [2w_p \delta Q_{p+1} - w_{p-1} \delta Q_{p+1} + \Delta x^2 w_p (Q_p \delta Q_{p+1} + Q_{p+1} \delta Q_p)],$$

ou, en confondant δQ_p et δQ_{p+1} [$H(x)$ étant supposé peu variable d'un point à l'autre] et en appliquant la relation aux différences (1'') :

$$z_{p+2} - w_{p+2} = \Delta x^2 (2w_{p+1} + w_{p-1}) \delta Q_p.$$

Des calculs analogues conduisent aux relations suivantes, où l'on a négligé les indices des δQ (supposés approximativement égaux entre eux) :

$$z_{p+3} - w_{p+3} = \Delta x^2 (3w_{p+2} + 2w_p + w_{p-2}) \delta Q,$$

$$z_{p+4} - w_{p+4} = \Delta x^2 (4w_{p+3} + 3w_{p+1} + 2w_{p-1} + w_{p-3}) \delta Q, \text{ etc.}$$

Ces relations ne sont qu'approchées mais suffisent à montrer le comportement de l'écart entre les deux solutions $z(x)$ et $w(x)$; on voit que cet écart croît rapidement avec l'amplitude elle-même, ce qui entraîne une divergence marquée entre les différentes solutions correspondant aux diverses valeurs d'essai de λ .

La comparaison des courbes $w(x)$ que l'on obtient au moyen des différentes valeurs d'essai de λ illustre bien ces conclusions théoriques.

A. Bassin de Nyanza. — On a utilisé 42 divisions, de 5 en 5 km ($\Delta x = 5$ km); cf. planche IV.

1. Mesures.

Section n°	x	$\bar{h} \equiv S/b$	$b(x)$	π^2/b^2
	km	m	km	10^{-12} cm^{-2}
I	2	49	24	1,71347
II	7	108	24,5	1,64425
III	12	134	24,5	1,64425
IV	17	145	23	1,86571
V	22	156	22,5	1,94955
VI	27	181	21,5	2,13512
VII	32	203	22	2,03917
VIII	37	207	24,5	1,64425
IX	42	198	27	1,35386
X	47	191	28	1,25888
XI	52	210	28	1,25888
XII	57	222	30	1,09662
XIII	62	229	32	0,96383
XIV	67	227	38,5	0,66585
XV	72	224	36,5	0,74082
XVI	77	219	22	2,03917
XVII	82	213	25	1,57914
XVIII	87	228	28,5	1,21547
XIX	92	267	30,5	1,06125
XX	97	314	32,5	0,93462
XXI	102	363	34,5	0,82938
XXII	107	459	37	0,72094
XXIII	112	539	39	0,64889
XXIV	117	507	44,5	0,49846
XXV	122	475	50	0,39478
XXVI	127	677	49,5	0,40284
XXVII	132	880	49	0,41106
XXVIII	137	914	53,5	0,34485
XXIX	142	948	57,5	0,29854
XXX	147	1.015	56,5	0,30920

Section n°	x	$\bar{h} \equiv S/b$	$b(x)$	π^2/b^2
	km	m	km	10^{-12} cm^{-2}
XXXI	152	1.081	54,5	0,33231
XXXII	157	1.133	55	0,32627
XXXIII	162	1.169	55	0,32627
XXXIV	167	1.179	55	0,32627
XXXV	172	1.176	55,5	0,32044
XXXVI	177	1.173	55,5	0,32044
XXXVII	182	1.177	53,5	0,34485
XXXVIII	187	1.181	51	0,37945
XXXIX	192	1.144	54	0,33846
XL	197	1.068	58	0,29339
XLI	202	1.006	62,5	0,25268
XLII	207	921	66,5	0,22319

2. Résultats numériques.

a) Seiche uninodale transversale, sans nœud longitudinal. Recherche des valeurs $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ et étude de la « queue » exponentielle amortie. Trois couples de valeurs d'essai arbitraires (cf. p. 234), en italique.

Prenons comme points initiaux les points portant les numéros XXXIV et XXXV, situés dans une région où $w(x)$ présente certainement l'allure demandée.

Valeur propre d'essai : $\omega^2 = 0,250 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$	$Q(x)$	$w(x)$		
	10^{-12} cm^{-2}	10^{-12} cm^{-2}	$10^n \text{ cm}^{(104)}$		
XXXIV			<i>2,00000</i>	<i>2,00000</i>	<i>2,00000</i>
XXXV	0,21737	0,10307	<i>1,60000</i>	<i>1,70000</i>	<i>1,65000</i>
XXXVI	0,21792	0,10252	1,24123	1,44380	1,34252
XXXVII	0,21718	0,12767	0,91427	1,22460	1,06945
XXXVIII	0,21644	0,16301	0,61649	1,04449	0,83051
XXXIX	0,22404	0,11442	0,34383	0,90695	0,61808
XL	0,23934	0,05405	0,08101	0,79535	0,42333
XLI	0,25410	-0,00142	(négatif)	0,69450	0,23430
XLII	0,27755	-0,05436	—	0,59340	0,04519

Afin de nous rendre compte de l'influence d'une modification de la valeur propre sur le comportement de la fonction $w(x)$, recommençons les calculs

(104) Pour cette notation, cf. p. 206.

ci-dessus avec $\omega^2 = 0,300 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ et les valeurs initiales $w_{\text{XXXIV}} = 2,00000$ $w_{\text{XXXV}} = 1,70000$. On verra que cette influence est peu importante, à cause du petit nombre de points et de la décroissance de $w(x)$, comme le prévoit la théorie exposée pp. 235-236.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$ 10^{-12} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-12} cm^{-2}	$w(x)$ 10^2 cm
XXXIV	0,26018	0,06609	2,00000
XXXV	0,26084	0,05960	1,70000
XXXVI	0,26151	0,05893	1,42533
XXXVII	0,26062	0,08423	1,17166
XXXVIII	0,25973	0,11972	0,94266
XXXIX	0,26884	0,06962	0,74187
XL	0,28721	0,00618	0,55399
XLI	0,30492	-0,05224	0,36697
XLII	0,33306	-0,10987	0,17516

Les courbes ci-dessous permettent la comparaison de ces divers résultats. Des essais ultérieurs, effectués avec diverses valeurs propres, mènent à retenir comme satisfaisante la valeur $\omega^2 = 0,2682 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ ($\lambda = 0,2742 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$), d'où $T \simeq 1213 \text{ sec} = 20 \text{ min. } 13 \text{ sec.}$

N. B. — Dans les six figures qui suivent (50 à 55), l'axe des x a été gradué en n°s de sections et non en km, ceci afin de faciliter le repérage des zones à seiches sur la planche IV.

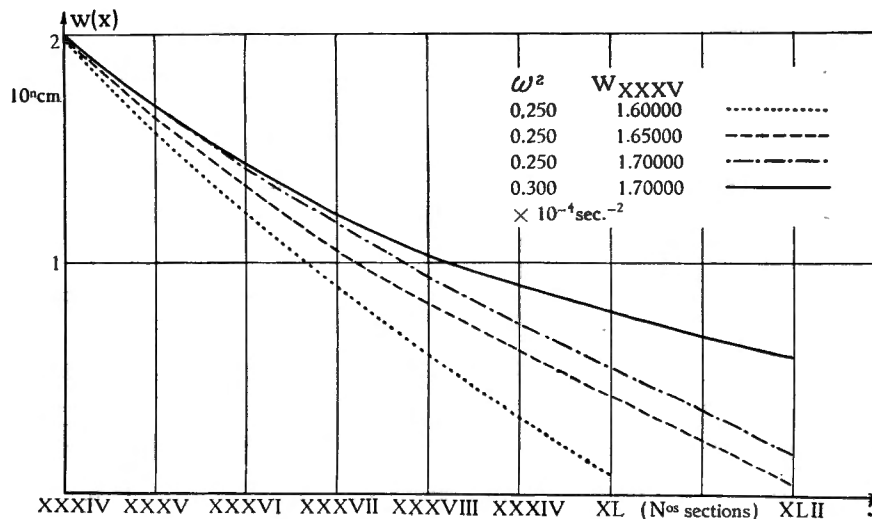


FIG. 50. — Lac Tanganika. Bassin de Nyanza.

Étude de la décroissance exponentielle de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale uninodale (sans nœud longitudinal), en fonction des valeurs initiales de $w(x)$ et de la valeur propre ω^2 .

Voici les résultats de ce dernier essai.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$ 10^{-12} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-12} cm^{-2}	$w(x)$ 10^n cm
I	5,59659	-3,88312	-0,07192
II	2,53919	-0,89494	1,45033
III	2,04652	-0,40227	2,64809
IV	1,89127	-0,02556	3,57954
V	1,75791	0,19164	4,48802
VI	1,51510	0,62002	5,61152
VII	1,35090	0,68827	7,60483
VIII	1,32480	0,31945	10,90669
IX	1,38502	-0,03116	15,07958
X	1,43578	-0,17690	19,13500
XI	1,30587	-0,04699	22,34417
XII	1,23528	-0,13866	25,29085
XIII	1,19752	-0,23369	27,36082
XIV	1,20808	-0,54223	27,83230
XV	1,22426	-0,48344	24,53090
XVI	1,25220	0,78697	18,26470
XVII	1,28748	0,29166	15,59195
XVIII	1,20278	0,01269	14,05609
XIX	1,01058	0,05067	12,56482
XX	0,87335	0,06127	11,23271
XXI	0,75546	0,07392	10,07266
XXII	0,59746	0,12348	9,09875
XXIII	0,50878	0,14011	8,40572
XXIV	0,54089	-0,04243	8,00712
XXV	0,57733	-0,18255	7,52358
XXVI	0,40507	-0,00223	6,69668
XXVII	0,31163	0,09943	5,86605
XXVIII	0,30004	0,04481	5,18124
XXIX	0,28928	0,00924	4,55447
XXX	0,27018	0,03902	3,93822
XXXI	0,25368	0,07863	3,36039
XXXII	0,24204	0,08423	2,84862
XXXIII	0,23459	0,09168	2,39684
XXXIV	0,23260	0,09367	2,00000
XXXV	0,23319	0,08725	1,65000
XXXVI	0,23379	0,08665	1,33599
XXXVIII	0,23299	0,11186	1,05092
XXXVIII	0,23220	0,14725	0,79524
XXXIX	0,24035	0,09811	0,56883
XL	0,25677	0,03662	0,35637
XLI	0,27260	-0,01992	0,14717
XLII	0,29775	-0,07456	—

La graphique ci-dessous montre l'allure de la fonction $w(x)$ pour quelques-unes des valeurs d'essai de ω^2 :

Courbe II :	$\omega^2 = 0,280 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$	($T \approx 1.187 \text{ sec}$) ;
Courbe III :	$\omega^2 = 0,260 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$	($T \approx 1.232 \text{ sec}$) ;
Courbe IV :	$\omega^2 = 0,2686 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$	($T \approx 1.212 \text{ sec}$) ;
Courbe V :	$\omega^2 = 0,2682 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$	($T \approx 1.213 \text{ sec}$) ;

La dernière de ces quatre valeurs de ω^2 , qui annule $w(x)$ à l'extrémité nord du lac, a été adoptée comme « exacte ».

L'extrême sensibilité de la méthode est bien mise en relief : quelques % d'écart entre les valeurs d'essai de ω^2 suffisent à modifier complètement l'allure des fonctions $w(x)$; aussi l'amélioration que l'on pouvait espérer d'un nouvel essai paraît-elle illusoire.

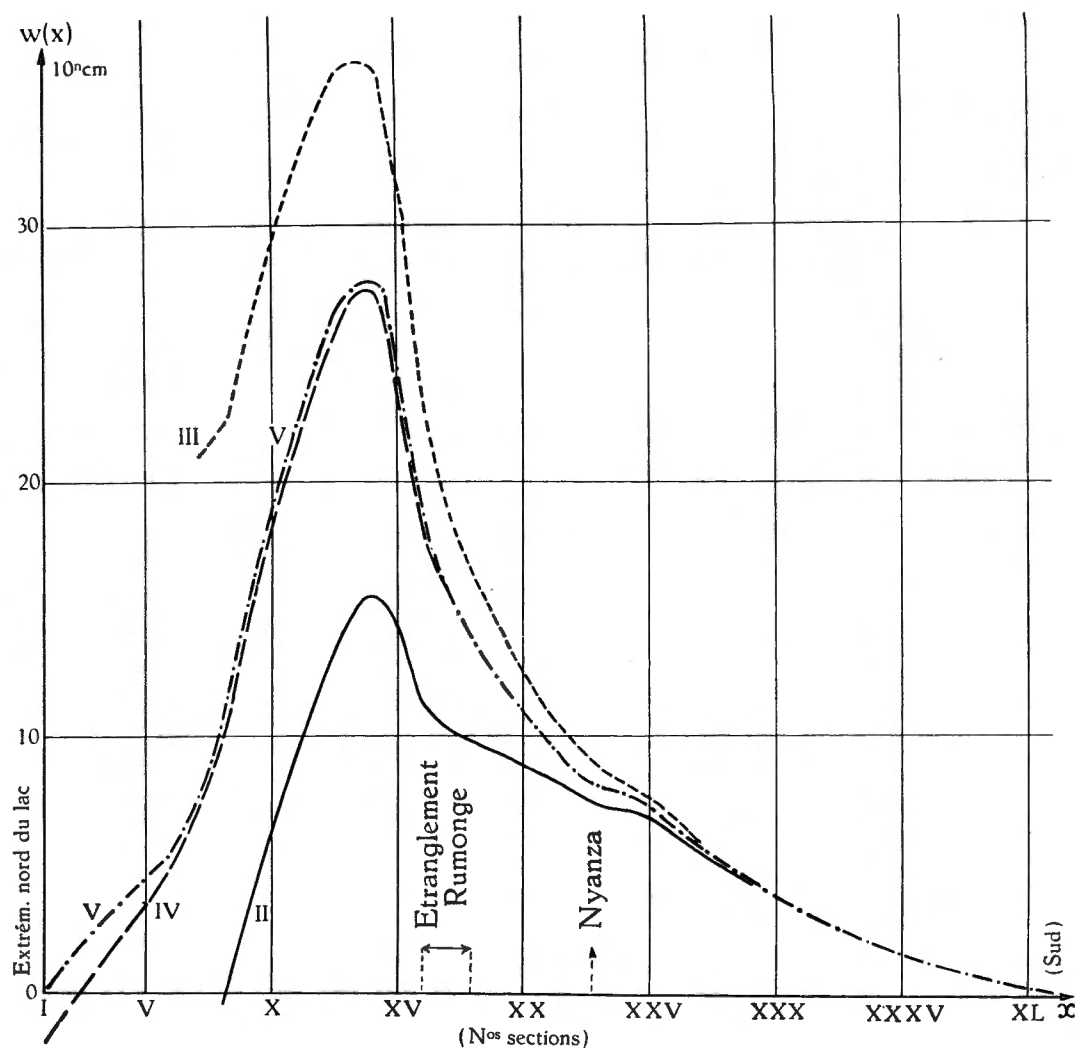


FIG. 51. — Lac Tanganika. Bassin de Nyanza.

Distribution de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale unimodale (sans nœud longitudinal) en fonction des valeurs propres d'essai ω^2 adoptées successivement.

Période propre : $T \approx 20$ minutes.

b) Seiche uninodale transversale, à un nœud longitudinal. Des essais, effectués comme plus haut à partir des points numérotés XXXIV et XXXV, ont conduit à retenir comme valeurs initiales respectives pour $w(x)$: $w_{XXXIV} = 2,000$ et $w_{XXXV} = 1,700$ (en 10^n cm).

La valeur propre retenue comme « exacte » est : $\omega^2 = 0,320 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ ($\lambda = 0,3272 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$), c'est-à-dire $T = 1110,7 \text{ sec.} \approx 18 \text{ min. } 31 \text{ sec.}$

Voici les résultats de ce dernier essai.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$ 10^{-12} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-12} cm^{-2}	$w(x)$ 10^n cm
			(2,30124)
I	6,67752	-4,96405	-1,50809
II	3,02961	-1,38536	-3,44586
III	2,44178	-0,79753	-4,19019
IV	2,25654	-0,39083	-4,09907
V	2,09743	-0,14788	-3,60744
VI	1,80773	0,32739	-2,98244
VII	1,61181	0,42736	-2,60155
VIII	1,58067	0,06358	-2,49861
IX	1,65252	-0,29866	-2,43539
X	1,71308	-0,45420	-2,19033
XI	1,55809	-0,29921	-1,69656
XII	1,47387	-0,37725	-1,07588
XIII	1,42881	-0,46498	-0,35373
XIV	1,44140	-0,77555	0,40954
XV	1,46071	-0,71989	1,09341
XVI	1,49405	0,54512	1,58050
XVII	1,53615	0,04299	2,28298
XVIII	1,43508	-0,21961	3,01000
XIX	1,22546	-0,16421	3,57176
XX	1,04203	-0,10741	3,98688
XXI	0,90136	-0,07198	4,29494
XXII	0,71285	0,00809	4,52571
XXIII	0,60705	0,04184	4,76563
XXIV	0,64536	-0,14690	5,05540
XXV	0,68884	-0,29406	5,15951
XXVI	0,48331	-0,08047	4,88432
XXVII	0,37181	0,03925	4,51087
XXVIII	0,35799	-0,01314	4,18168
XXIX	0,34514	-0,04660	3,83875
XXX	0,32236	-0,01316	3,45110
XXXI	0,30268	0,02963	3,05210
XXXII	0,28879	0,03748	2,67571
XXXIII	0,27990	0,04637	2,32438
XXXIV	0,27751	0,04876	2,00000
XXXV	0,27823	0,04221	1,70000

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$ 10^{-12} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-12} cm^{-2}	$w(x)$ 10^3 cm
XXXVI	0,27894	0,04150	1,44794
XXXVII	0,27800	0,06685	1,15059
XXXVIII	0,27706	0,10239	0,90247
XXXIX	0,28602	0,05244	0,67745
XL	0,30637	-0,01298	0,46131
XLI	0,32525	-0,07257	0,24366
XLII	0,35526	-0,13207	0,02159

Il résulte de ces calculs que le bassin dit « de Nyanza » serait le siège de deux seiches transversales au moins : la première, sans nœud longitudinal (et transversalement uninodale), présente un maximum d'amplitude immédiatement au nord de l'étranglement de Rumonge; la seconde, à un nœud longitudinal, situé à 10 km environ au nord de cet étranglement (et elle aussi transversalement uninodale), présente deux maxima d'amplitude : le premier, peu au sud de l'extrémité nord du lac, le second à une dizaine de km au sud de Nyanza. La graphique ci-dessous (fig. 52) montre l'allure de la fonction $w(x)$ correspondant à cette seiche, de période remarquablement voisine de la précédente : 18 min. 31 sec.

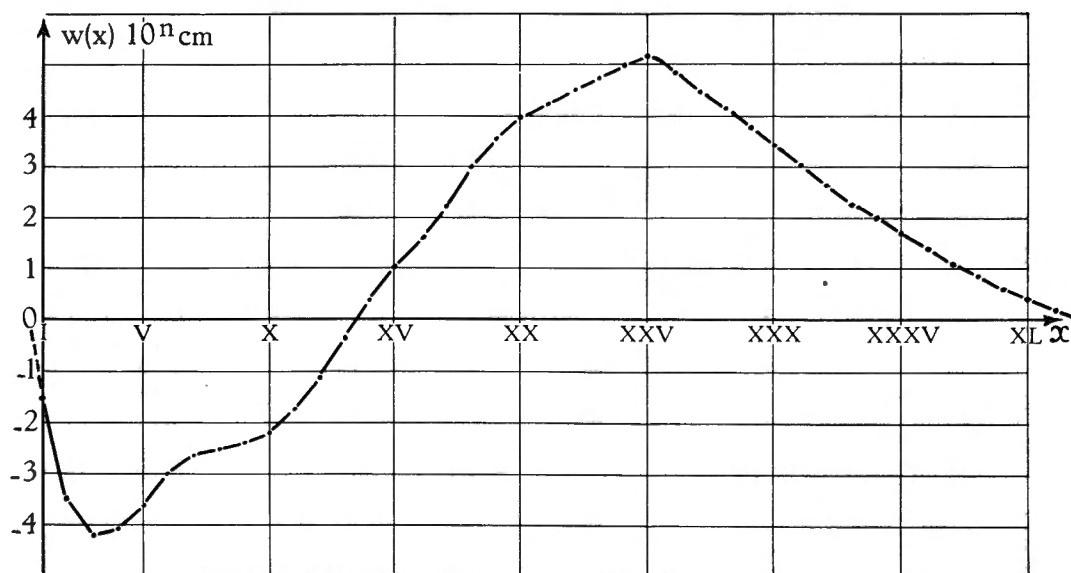


FIG. 52. — Lac Tanganika. Bassin de Nyanza.
Distribution de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale uninodale
(à un nœud longitudinal).
Période propre : $T \approx 18 \frac{1}{2}$ minutes.

B. Bassin d'Albertville : — On a utilisé 23 divisions, de 10 en 10 km ($\Delta x = 10$ km).

1. Mesures.

Section n°	x km	$\bar{h} \equiv S/b$ m	$b(x)$ km	π^2/b^2 10^{-12} cm^{-2}
I	162	1.160	55	0,32627
II	172	1.176	55	0,32627
III	182	1.178	53,5	0,34485
IV	192	1.132	54,5	0,33231
V	202	1.031	61	0,26524
VI	212	835	71,5	0,19307
VII	222	785	68	0,21344
VIII	232	583	66	0,22657
IX	242	479	63	0,24867
X	252	636	58,5	0,28842
XI	262	596	53	0,35136
XII	272	530	59,5	0,27880
XIII	282	486	66	0,22657
XIV	292	383	69,5	0,20434
XV	302	261	77	0,16646
XVI	312	300	75	0,17546
XVII	322	509	45	0,48739
XVIII	332	488	42	0,55950
XIX	342	514	40,5	0,60181
XX	352	563	49	0,41106
XXI	362	545	54	0,33846
XXII	372	608	51	0,37945
XXIII	382	449	77	0,16646

2. Résultats numériques.

Recherche des valeurs initiales $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ et étude de la « queue » exponentielle amortie.

Prenons comme points initiaux les points portant les numéros V et IV, et avançons du sud au nord. Les valeurs correspondantes de $w(x)$ choisies arbitrairement, comme il est expliqué page 234, sont imprimées en italique.

Valeur propre d'essai : $\omega^2 = 0,1115 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$ 10^{-12} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-12} cm^{-2}	$w(x)$ 10^2 cm		
V			<i>1,00000</i>	<i>1,00000</i>	<i>1,00000</i>
IV	0,10071	0,23160	<i>0,65000</i>	<i>0,60000</i>	<i>0,61000</i>
III	0,09678	0,24807	0,45466	0,35466	0,37466
II	0,09695	0,22932	0,37211	0,19730	0,23226
I	0,09828	0,22799	0,37489	0,08518	0,14312
[I'	0,10576	0,21468	(croît)	-0,00752	0,08661
II'	0,12026	0,17828	—	—	0,04869
[III'	0,12955	0,28151	—	—	0,01945

Le dernier couple de valeurs initiales, fournissant la meilleure allure exponentielle amortie, sera retenu pour les calculs ultérieurs (du nord au sud).

Les essais ont conduit à retenir comme satisfaisante la valeur $\omega^2 = 0,1111 \times 10^{-4} \text{ sec.}^{-2}$ ($T \approx 1885 \text{ sec.} = 31 \text{ min. } 25 \text{ sec.}$). On a le tableau suivant :

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$ 10^{-12} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-12} cm^{-2}	$w(x)$ 10^n cm
I	0,09793	0,22834	0,04172
II	0,09660	0,22967	0,17537
III	0,09643	0,24842	0,34930
IV	0,10035	0,23196	0,61000
V	0,11018	0,15506	1,00000
VI	0,13605	0,05702	1,54506
VII	0,14471	0,06873	2,17822
VIII	0,19485	0,03172	2,96109
IX	0,23716	0,01151	3,83789
X	0,17862	0,10980	4,75886
XI	0,19060	0,16076	6,20235
XII	0,21434	0,06446	8,64293
XIII	0,23374	-0,00717	11,64063
XIV	0,29660	-0,09226	14,55487
XV	0,43524	-0,26878	16,12628
XVI	0,37867	-0,20321	13,36327
XVII	0,22318	0,26421	7,88471
XVIII	0,23278	0,32672	4,48937
XIX	0,22101	0,38080	2,56080
XX	0,20177	0,20929	1,60738
XXI	0,20844	0,13002	0,99037
XXII	0,18684	0,19261	0,50213
XXIII	0,25301	-0,08655	0,11061

A titre de comparaison, voici les graphiques des courbes obtenues avec $\omega^2 = 0,1111 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ (courbe I) et $\omega^2 = 0,1115 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ (courbe II); l'allure de la seconde ne permet pas de la considérer comme satisfaisante.

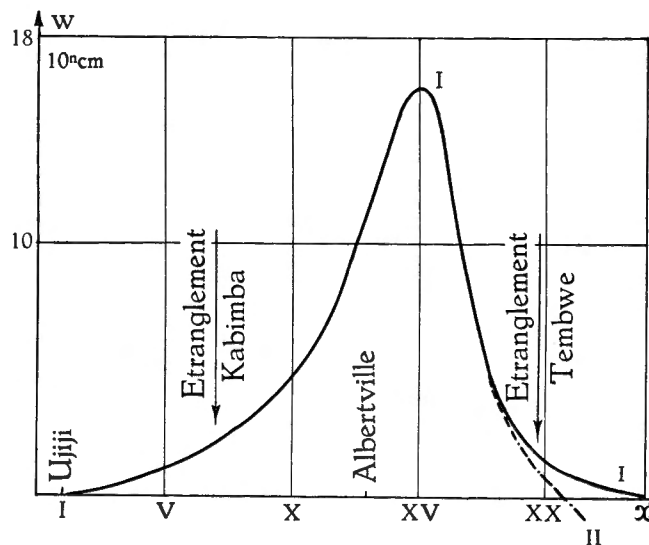


FIG. 53. — Lac Tanganika. Bassin d'Albertville.
Distribution de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale uninodeale (sans nœud longitudinal).
Période propre : $T \approx 31 \frac{1}{2}$ minutes.

C. Bassin de Moba. — On a utilisé 19 divisions, de 10 en 10 km ($\Delta x = 10$ km).

1. Mesures.

Section n°	x km	$\bar{h} \equiv S/b$ m	$b(x)$ km	π^2/b^2 10^{-12} cm $^{-2}$
I	313	300	75	0,17546
II	323	509	45	0,48739
III	333	488	42	0,55950
IV	343	514	40,5	0,60180
V	353	565	48	0,42837
VI	363	544	54	0,33846
VII	373	608	51	0,37945
VIII	383	449	77	0,16646
IX	393	457	79	0,15814
X	403	473	74	0,18023
XI	413	431	74,5	0,17782
XII	423	431	74,5	0,17782
XIII	433	429	70,5	0,19857
XIV	443	500	64	0,24096
XV	453	669	61,5	0,26095
XVI	463	790	59,5	0,27880
XVII	473	1.024	50	0,39478
XVIII	483	1.165	45,5	0,47673
XIX	493	1.050	52,5	0,35811

2. Résultats numériques.

Recherche des valeurs initiales $w(\alpha)$ et $w(\beta)$, et étude de la « queue » exponentielle amortie. Prenons comme points initiaux les points numérotés V et IV et calculons $w(x)$ en allant du sud au nord. Les valeurs correspondantes de $w(x)$ sont choisies arbitrairement, comme d'habitude.

Valeurs d'essai : $\omega^2 = 0,1136 \times 10^{-4}$ sec $^{-2}$.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$ 10^{-12} cm $^{-2}$	$Q(x)$ 10^{-12} cm $^{-2}$	$w(x)$ 10^n cm		
V			1,00000	1,00000	1,00000
IV	0,22598	0,37582	0,80000	0,54000	0,62000
III	0,23802	0,32148	0,90066	0,28294	0,47301
II	0,22820	0,25919	1,29086	0,11684	0,47808
I	0,38718	-0,21172	2,01564	-0,01898	0,60706
[I/	0,44504	-0,27858	2,31367		0,60751
[II/	0,30328	-0,09894	1,96716		0,43872
[III/	0,23900	-0,01242	1,42602		0,22652
[IV/	0,21431	0,05985	0,86717		0,01151
[V/	0,19555	0,16256	0,36022		
[VI/	0,18496	0,11358	-0,08817		

Le second couple de valeurs initiales donne à la courbe $w(x)$ une allure exponentielle amortie satisfaisante et sera retenu pour les calculs ultérieurs.

Des essais ultérieurs conduisent à retenir comme satisfaisante la valeur $\omega^2 = 0,1126 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ ($\lambda = 0,115 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$), c'est-à-dire $T = 1872 \text{ sec.} = 31 \text{ min. } 12 \text{ sec.}$

On a ainsi le tableau suivant :

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$ 10^{-12} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-12} cm^{-2}	$w(x)$ 10^2 cm
I	0,38377	-0,20831	-0,01285
II	0,22619	0,26120	0,11992
III	0,23592	0,32358	0,28401
IV	0,22399	0,37781	0,54000
V	0,20378	0,22459	1,00000
VI	0,21164	0,12682	1,68459
VII	0,18937	0,19008	2,58282
VIII	0,25642	-0,08996	3,97199
IX	0,25193	-0,09379	5,00384
X	0,24341	-0,06318	5,56638
XI	0,26713	-0,08930	5,77724
XII	0,26713	-0,08930	5,47219
XIII	0,26838	-0,06980	4,67847
XIV	0,23026	0,01070	3,55819
XV	0,17210	0,08886	2,47598
XVI	0,14574	0,13306	1,61379
XVII	0,11243	0,28235	0,96633
XVIII	0,09882	0,37797	0,51971
XIX	0,10965	0,24846	0,44074

A titre de comparaison, voici les graphiques des courbes obtenues avec $\omega^2 = 0,1126 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ (courbe I), $\omega^2 = 0,1136 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ (courbe II), et $\omega^2 = 0,1120 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ (courbe III).

Seule la première valeur propre peut être considérée comme satisfaisante.

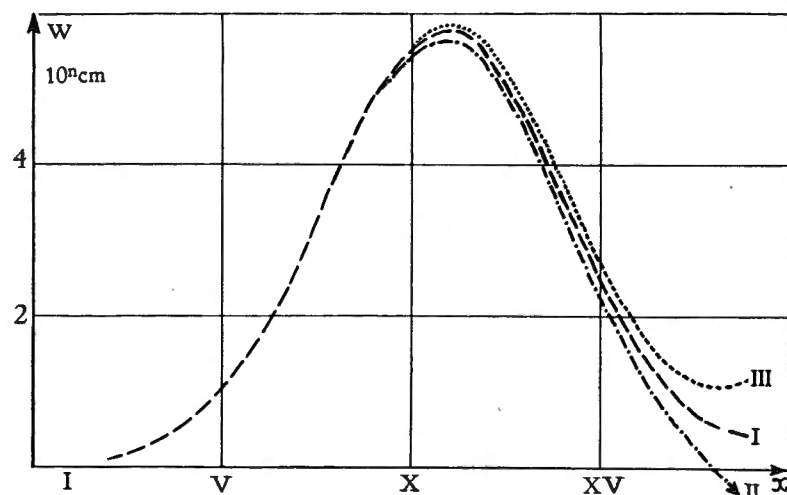


FIG. 54. — Lac Tanganika. Bassin de Moba.
Distribution de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale uninodale
(sans nœud longitudinal).
Période propre : $T \simeq 31 \frac{1}{2}$ minutes.

D. Bassin de Kala. — On a utilisé 20 divisions, de 10 en 10 km ($\Delta x = 10$ km).

1. Mesures.

Section n°	x	$\bar{h} \equiv S/b$	$b(x)$	π^2/b^2
	km	m	km	10^{-12} cm^{-2}
I	480	1.141	46	0,46643
II	490	1.098	48	0,42837
III	500	1.017	52,5	0,35811
IV	510	1.128	52,5	0,35811
V	520	1.139	51	0,37945
VI	530	1.038	52	0,36500
VII	540	882	52	0,36500
VIII	550	812	50,5	0,38704
IX	560	741	47	0,44679
X	570	646	42,5	0,54649
XI	580	561	42,5	0,54649
XII	590	529	44	0,50979
XIII	600	511	48,5	0,41963
XIV	610	371	69,5	0,20434
XV	620	350	50	0,39478
XVI	630	287	46	0,46643
XVII	640	209	39,5	0,63267
XVIII	650	160	35	0,80568
XIX	660	91	32,5	0,93462
XX	670	79	19	2,73397

2. Résultats numériques.

a) Seiche uninodale transversale, sans nœud longitudinal. Recherche des valeurs initiales $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ et étude de la « queue » exponentielle amortie. Prenons comme points initiaux ceux numérotés VIII et VII, et calculons $w(x)$ en allant du sud au nord.

Valeur d'essai : $\omega^2 = 0,1476 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$	$Q(x)$	$w(x)$		
	10^{-12} cm^{-2}	10^{-12} cm^{-2}	10^n cm		
VIII	0,18586	0,20118	1,00000	1,00000	1,00000
VII	0,17111	0,19389	0,64000	0,63000	0,63500
VI	0,14540	0,21960	0,40409	0,38215	0,39312
V	0,13250	0,24695	0,25692	0,21822	0,23757
IV	0,13379	0,22432	0,17320	0,10818	0,14069
III	0,14840	0,20971	0,12833	0,02083	0,07537
II	0,13745	0,29092	0,11037	—	0,02586
I	0,13227	0,33416	—	—	—

On retiendra comme satisfaisant le troisième couple de valeurs arbitraires.

De nouveaux essais conduisent alors à la valeur propre déjà trouvée : $\omega^2 = 0,1476 \times 10^{-1} \text{ sec}^{-2}$ ($\lambda = 0,1509 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$), c'est-à-dire $T \simeq 1.635 \text{ sec.} = 27 \text{ min. } 15 \text{ sec.}$

D'où le tableau suivant :

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$ 10^{-12} cm^{-2}	$Q(x)$ 10^{-12} cm^{-2}	$w(x)$ 10^9 cm
I	0,13227	0,33416	—
II	0,13745	0,29092	0,02586
III	0,14840	0,20971	0,07537
IV	0,13379	0,22432	0,14069
V	0,13250	0,24695	0,23757
VI	0,14540	0,21960	0,39312
VII	0,17111	0,19389	0,63500
VIII	0,18586	0,20118	1,00000
IX	0,20367	0,24312	1,56618
X	0,23362	0,31287	2,51513
XI	0,26902	0,27747	4,25099
XII	0,28529	0,22450	7,16637
XIII	0,29534	0,12429	11,69060
XIV	0,40679	-0,20245	17,66785
XV	0,43120	-0,03641	20,06825
XVI	0,52585	-0,05942	21,73797
XVII	0,72211	-0,08944	22,11602
XVIII	0,94325	-0,13757	20,51601
XIX	1,65846	-0,72384	16,09361
XX	7,94317	—	0,02201

Comme on peut s'en rendre compte sur le graphique (cf. p. 250), la décroissance exponentielle est très nette vers le nord, mais beaucoup moins marquée vers le sud. Comme le lac se rétrécit fortement vers le sud, en même temps que sa profondeur diminue rapidement, on peut considérer comme satisfaisant le comportement de la fonction $w(x)$ en cet endroit.

b) Seiche binodale transversale.

Outre ses deux nœuds transversaux, le seiche ici calculée présente encore un nœud longitudinal. Comme on le verra plus loin, l'apparition de ce nœud longitudinal s'explique par l'incurvation des lignes nodales transversales qui rencontrent les rives du lac (cf. notamment fig. 65, p. 262).

A cause des deux nœuds transversaux, on a

$$Q(x) = \frac{4\pi^2}{b^2(x)} - \frac{\omega^2}{g\bar{h}(x)}.$$

Recherche des valeurs initiales $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ et étude de la « queue » expo-

entielle amortie. Prenons à nouveau comme points initiaux ceux numérotés VIII et VII, et calculons $w(x)$ en allant du sud au nord.

Valeur d'essai : $\omega^2 = 0,5506 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$.

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$	$Q(x)$	$w(x)$		
	10^{-12} cm^{-2}	10^{-12} cm^{-2}	10^9 cm		
VIII	0,69333	0,85483	1,00000	1,00000	1,00000
VII	0,63831	0,82169	0,41000	0,41300	0,41200
VI	0,54238	0,91762	0,15689	0,16536	0,16254
V	0,49428	1,02354	0,04775	0,06946	0,06223
IV	0,49910	0,93335	(négatif)	0,04466	0,02561
III	0,55357	0,87888	—	0,06154	0,01289
II	0,51274	1,20073	—	(croît)	—
I	0,49341	1,37230	—	—	—

L'allure prise par la fonction $w(x)$ pour le dernier couple de valeurs initiales est satisfaisante. Ces valeurs initiales seront donc réutilisées pour le calcul de $w(x)$ des points VIII à XX.

La valeur propre non plus ne nécessite pas de nouvel ajustement. On aura donc le tableau final suivant :

$\omega^2 = 0,5506 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ ($\lambda = 0,5630 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$) c'est-à-dire $T = 847 \text{ sec} = 14 \text{ min. } 7 \text{ sec.}$

Section n°	$\omega^2/g\bar{h}$	$Q(x)$	$w(x)$
	10^{-12} cm^{-2}	10^{-12} cm^{-2}	10^9 cm
I	0,49341	1,37230	—
II	0,51274	1,20073	—
III	0,55357	0,87888	0,01289
IV	0,49910	0,93335	0,02561
V	0,49428	1,02354	0,06223
VI	0,54238	0,91762	0,16254
VII	0,63831	0,82169	0,41200
VIII	0,69333	0,85483	1,00000
IX	0,75976	1,02740	2,44283
X	0,87149	1,31447	6,39542
XI	1,00354	1,18242	18,75460
XII	1,06425	0,97491	53,28959
XIII	1,10173	0,57679	139,77713
XIV	1,51748	-0,70012	306,88672
XV	1,60853	-0,02941	259,13878
XVI	1,96162	-0,09590	203,76957
XVII	2,69371	-0,16303	128,85886
XVIII	3,51866	-0,29594	32,94029
XIX	6,18666	-2,44818	-72,72663
XX	—	—	-0,34567

Comme pour la seiche uninodale calculée précédemment, l'allure exponentielle amortie de $w(x)$ n'est bien marquée que vers le nord; vers le sud au contraire, la fonction $w(x)$ reste nettement oscillante, mais étant donné la forme particulière du lac en cette région, le résultat obtenu reste acceptable physiquement; $w(x)$ du reste s'annule pratiquement à l'extrémité sud du lac.

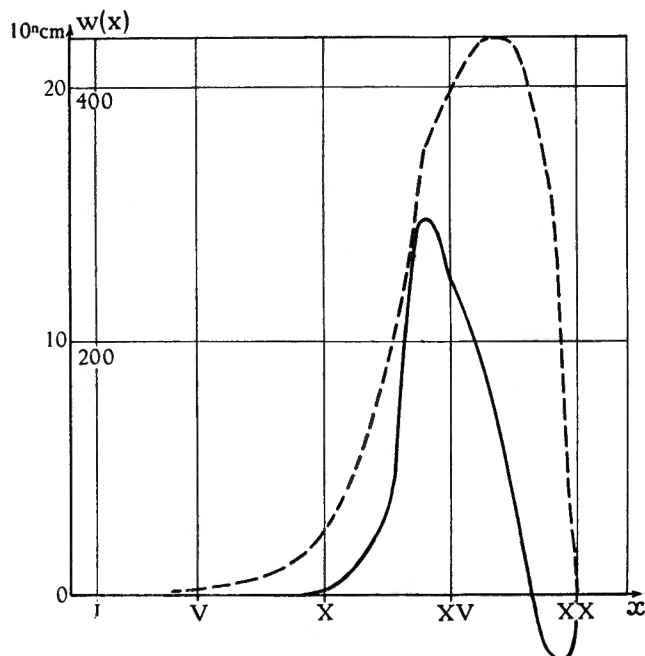


FIG. 55. — Lac Tanganika. Bassin de Kala.

Distribution de l'amplitude $w(x)$ de la seiche transversale uninodale, sans nœud longitudinal (courbe en trait interrompu), et de la seiche transversale binodale, à un nœud longitudinal (courbe en trait continu).
Périodes propres respectives : $T \simeq 27$ minutes et $T \simeq 14$ minutes.

Orthogonalité des fonctions $w(x)$.

Considérons l'équation en $w(x)$, où le nombre de nœuds transversaux est r ; ce nombre sera employé comme indice pour distinguer les différentes « classes » de fonctions et de valeurs propres :

$$w_r'' + \left\{ \frac{\omega_r^2}{g\bar{h}(x)} - \frac{r^2 \pi^2}{b^2(x)} \right\} w_r = 0,$$

avec les conditions-frontière habituelles de décroissance exponentielle de w_r vers les extrémités du bassin.

L'équation étant auto-adjointe seulement pour chaque « classe » de fonctions et de valeurs propres possédant le même nombre de nœuds transversaux ⁽¹⁰⁵⁾, il n'y aura d'orthogonalité qu'entre fonctions w_{r_s} qui diffèrent par le nombre

⁽¹⁰⁵⁾ Cf. COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme*, p. 59.

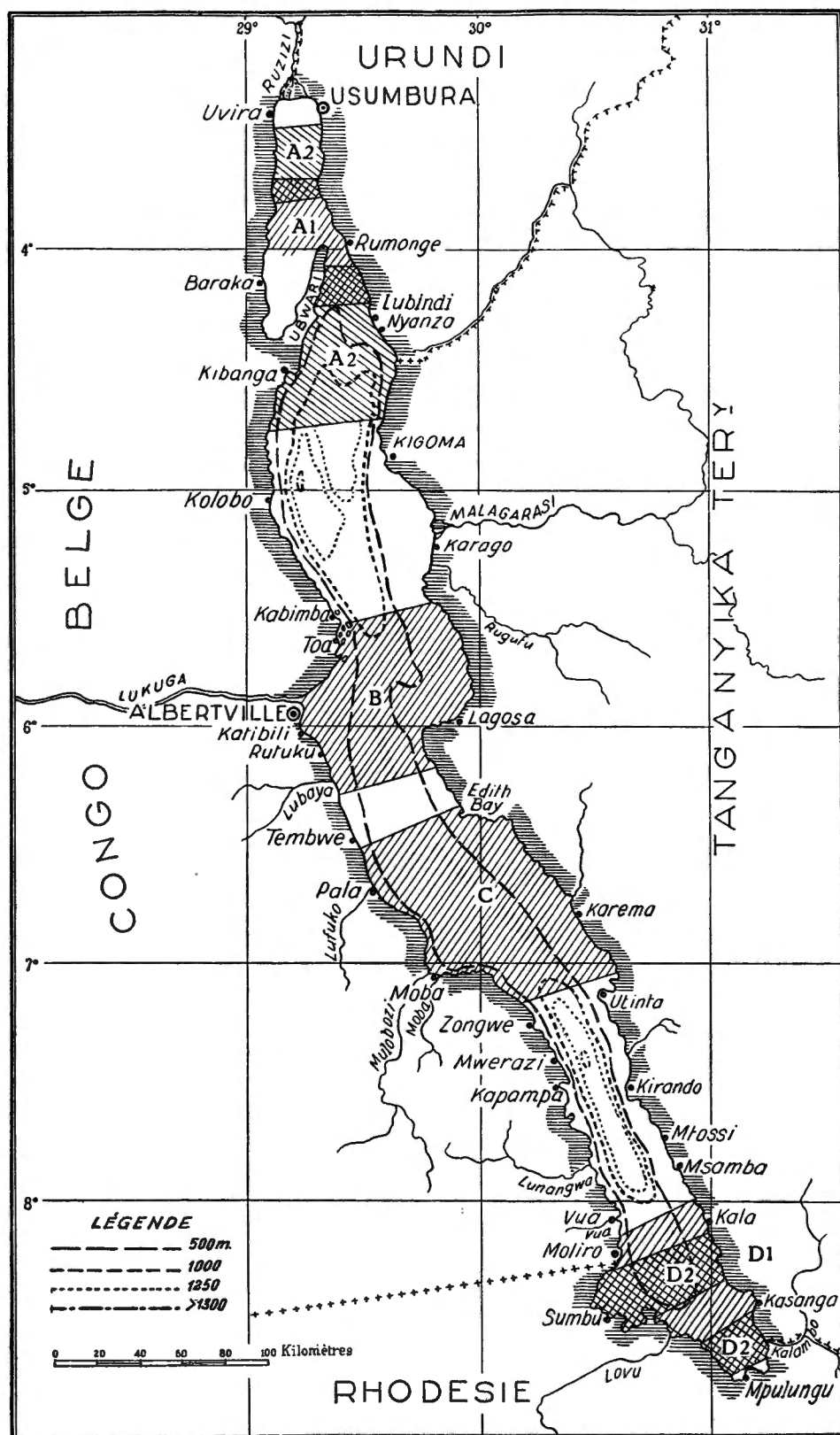


PLANCHE V. — Lac Tanganika. Régions d'activité des seiches transversales.

Bassin de Nyanza : A 1 : seiche uninodale (transversalement) et zéro-nodale (longitudinalement);
A 2 : uninodale-uninodale.

Bassin d'Albertville : B : uninodale-zéro-nodale.

Bassin de Moba : C : uninodale-zéro-nodale.

Bassin de Kala : D 1 : uninodale-zéro-nodale; D 2 : binodale-uninodale.

N.B. — Le tracé du contour du lac est inexact en ce qui concerne la baie de Burton et la presqu'île d'Ubwari (cf. Pl. II et fig. 19).

de leurs nœuds longitudinaux s et possèdent le même nombre de nœuds transversaux r ; on aura, pour des fonctions normées :

$$(ss') \equiv \int \frac{w_{rs} w_{rs'}}{\bar{h}(x)} dx = \begin{cases} 0 & (s' \neq s). \\ 1 & (s' = s). \end{cases}$$

Les valeurs propres $\lambda \equiv \omega^2/g$ peuvent ainsi être distinguées à l'aide de deux indices, et de même les périodes : λ_{rs} et T_{rs} . Avec ces notations, les fonctions $w(x)$ et les périodes T calculées ci-dessus sont donc : w_{10} et T_{10} pour les bassins d'Albertville et de Moba; w_{10} et w_{21} , T_{10} et T_{21} pour celui de Kala; w_{10} et w_{11} , T_{10} et T_{11} enfin pour celui de Nyanza. La vérification de l'orthogonalité des fonctions $w(x)$ ne peut donc avoir lieu que pour le bassin de Nyanza. On a trouvé : $(0,1) = 0,029$, ce qui indique une orthogonalité satisfaisante.

La planche V représente une carte du lac, où les zones hachurées représentent les régions d'activité des seiches transversales calculées dans ce § 2.

§ 3. CALCUL DES SEICHES PAR LA NOUVELLE MÉTHODE DES COORDONNÉES CURVILIGNES.

A. Bassin de Nyanza. — On a tracé empiriquement (voir carte ci-après) onze courbes d'égale dénivellation ($\zeta = \text{const.}$), formant une famille $\psi = \text{const.}$ et délimitant douze compartiments numérotés en chiffres arabes.

Comme au § 2, les régions rognées pour le calcul des seiches longitudinales ont été, le cas échéant, rétablies pour le calcul des seiches transversales.

1. Mesures.

Section n°	Δv km ²	v km ²	S km ²	$\Delta\bar{\psi}$ km
1	118	118	12,50	6
2	162	280	23,09	4,5
3	323	603	35,19	5
4	403	1.006	50,04	5,5
5	422	1.428	72,16	5
6	403	1.831	73,12	4,5
7	335	2.166	74,91	4
8	444	2.610	75,37	4,5
9	501	3.111	73,94	5,5
10	346	3.457	43,30	5
11	204	3.661	18,75	5
12	73	3.734	0	4

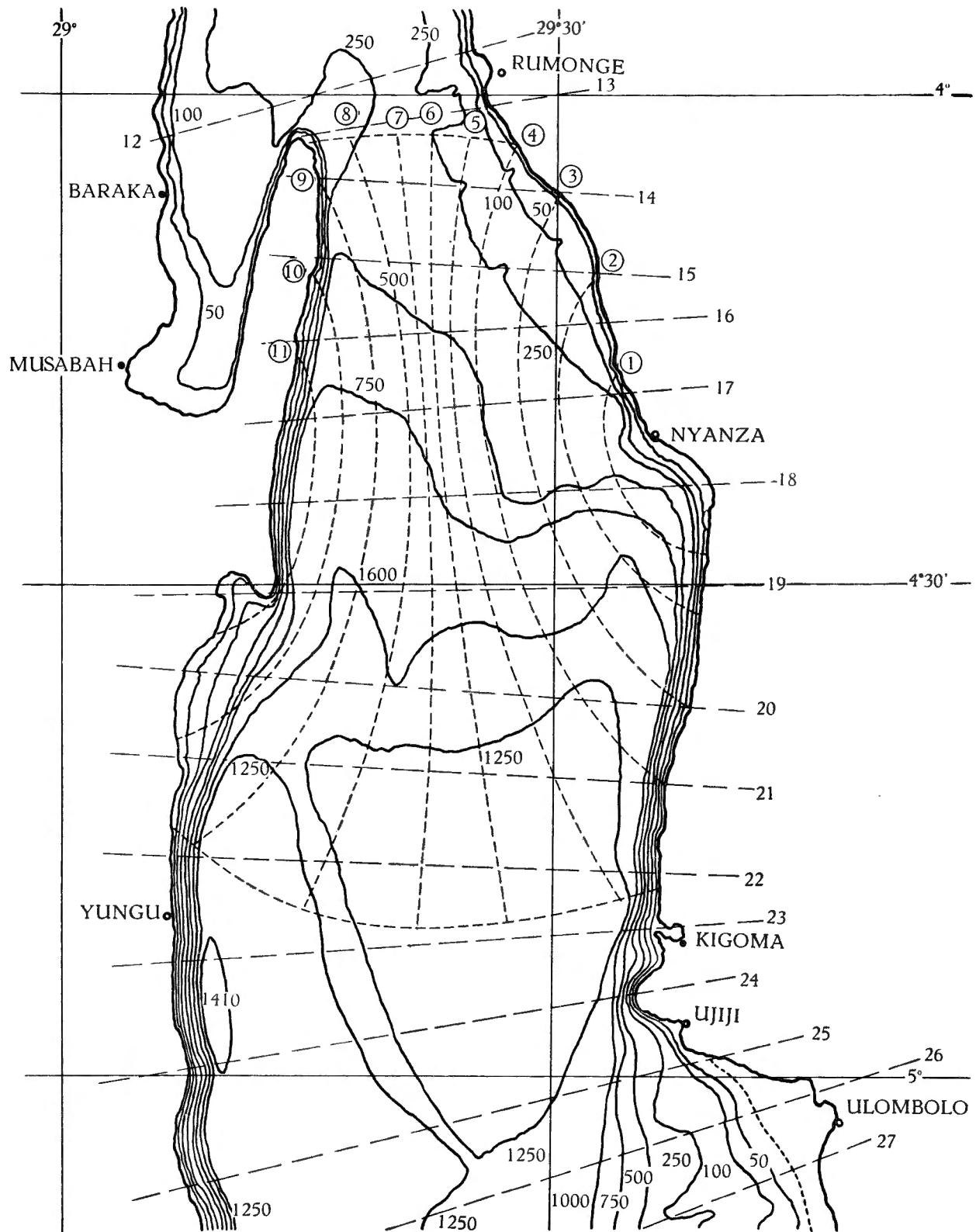


FIG. 56. — Lac Tanganika. Bassin de Nyanza. Carte bathymétrique.

1-11 : Divisions utilisées pour le calcul de la seiche transversale uninodale de 18 minutes, par coordonnées curvilignes.

[12-27 : Divisions utilisées pour le calcul des seiches longitudinales; cf. pp. 110 sqq.]

2. Résultats numériques.

Valeur d'essai : $\lambda = 35,70 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$.

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	$\bar{\varphi}$ m	$\Delta\zeta$ cm
1	100,0000	118,0000	9,4400	-20,2205
2	79,7795	247,2428	10,7078	-17,2021
3	62,5774	449,3678	12,7698	-22,7940
4	39,7834	609,6949	12,1842	-23,9237
5	15,8797	676,6228	9,3767	-16,7374
6	- 0,8577	673,1663	9,2063	-14,7899
7	-15,6476	620,7468	8,2866	-11,8333
8	-27,4809	498,7316	6,6171	-10,6303
9	-38,1112	307,7945	4,1628	- 8,1737
10	-46,2849	147,6487	3,4099	- 6,0866
11	-52,3715	40,8108	2,1766	- 3,8852
12	-56,2567	- 0,2566	—	—

Un essai précédent, avec $\lambda = 35,72 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, avait laissé un « résidu » $u_{12} = 1,1718 \times 10^6 \text{ m}^3$. Extrapolant linéairement, on obtient la valeur « améliorée » $\lambda = 35,694 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, d'où $T = 1.063,4 \text{ sec.} = 17 \text{ min. } 43 \text{ sec.}$, soit environ 12 % de moins que par la méthode de l'équation en $w(x)$, qui donnait $T = 1.213 \text{ sec.} = 20 \text{ min. } 13 \text{ sec.}$ L'accord est satisfaisant, compte tenu du fait que la seiche calculée ici est nettement plus locale que celle étudiée pp. 236-240 (ceci à cause de la difficulté de tracer les courbes $\zeta = \text{const.}$ autour du seuil de Rumonge); il s'agit peut-être ici de la « branche » sud de la seconde transversale, de $18 \frac{1}{2} \text{ min.}$, calculée pp. 241-242.

Voici un graphique du profil de la seiche étudiée.

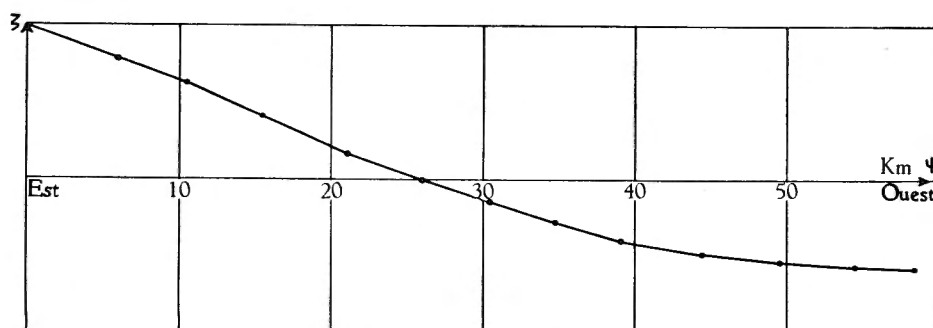


FIG. 57. — Lac Tanganika, Bassin de Nyanza.
Profil de la seiche transversale unimodale de 18 minutes.

On remarquera que la dénivellation est environ deux fois plus forte à l'est qu'à l'ouest, ce qui est entièrement conforme à ce que l'on peut s'attendre à

observer, si l'on examine les courbes bathymétriques du lac : à l'est les côtes sont en pente douce et le lac est peu profond, tandis qu'à l'ouest la côte est constituée par une paroi rocheuse fortement inclinée et le lac est plus profond.

Sous ce rapport, la seconde méthode fournit donc une bien meilleure représentation de la seiche que la première, celle-ci supposant à priori que le profil est parfaitement sinusoïdal entre les deux rives opposées du lac.

Il est remarquable qu'en dépit de cette divergence initiale les deux méthodes fournissent des périodes d'oscillation fondamentale aussi voisines.

Voici encore, pour terminer l'étude du mode fondamental du bassin de Nyanza, le graphique de la fonction propre $u(v)$ de ce mode.

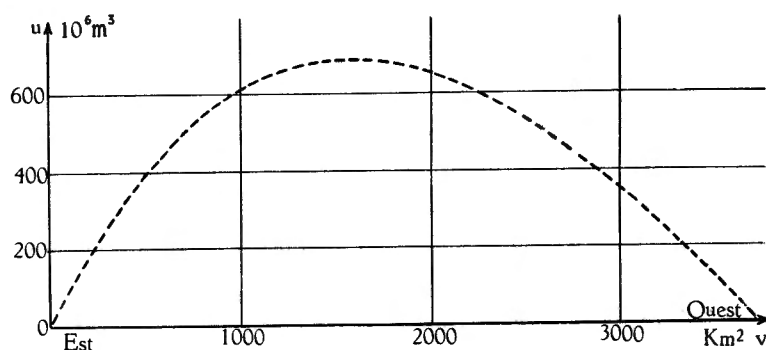


FIG. 58. — Lac Tanganika. Bassin de Nyanza.
Fonction propre $u(v)$ du mode fondamental transversal.

B. Bassin d'Albertville. — La forme très particulière de ce bassin rend malaisé le tracé des courbes d'égalé dénivellation ($\zeta = \text{const}$) formant une famille $\psi = \text{const}$. Sur la carte ci-après, on a délimité seize compartiments, mais à la suite d'une erreur matérielle, on a dû renverser le sens de leur numérotation dans la table ci-dessous, ainsi que dans les calculs qui suivent. De plus, les compartiments 1 et 2 seront traités comme n'en formant qu'un seul. Le caractère arbitraire et discutable du tracé des courbes d'égalé dénivellation exige que les résultats ci-après ne soient acceptés qu'avec réserve, bien que tout autre tracé eût probablement appelé la même remarque.

1. Mesures.

Section n°	Δv km ²	v km ²	S km ²	$\Delta\bar{\psi}$ km
15	174	174	4,425	7
14	220	394	9,31	6
13	239	633	15,40	5,2
12	246	879	21,37	5
11	259	1.138	27,95	4,8
10	274	1.412	30,31	4,5
9	367	1.779	45,92	5,2

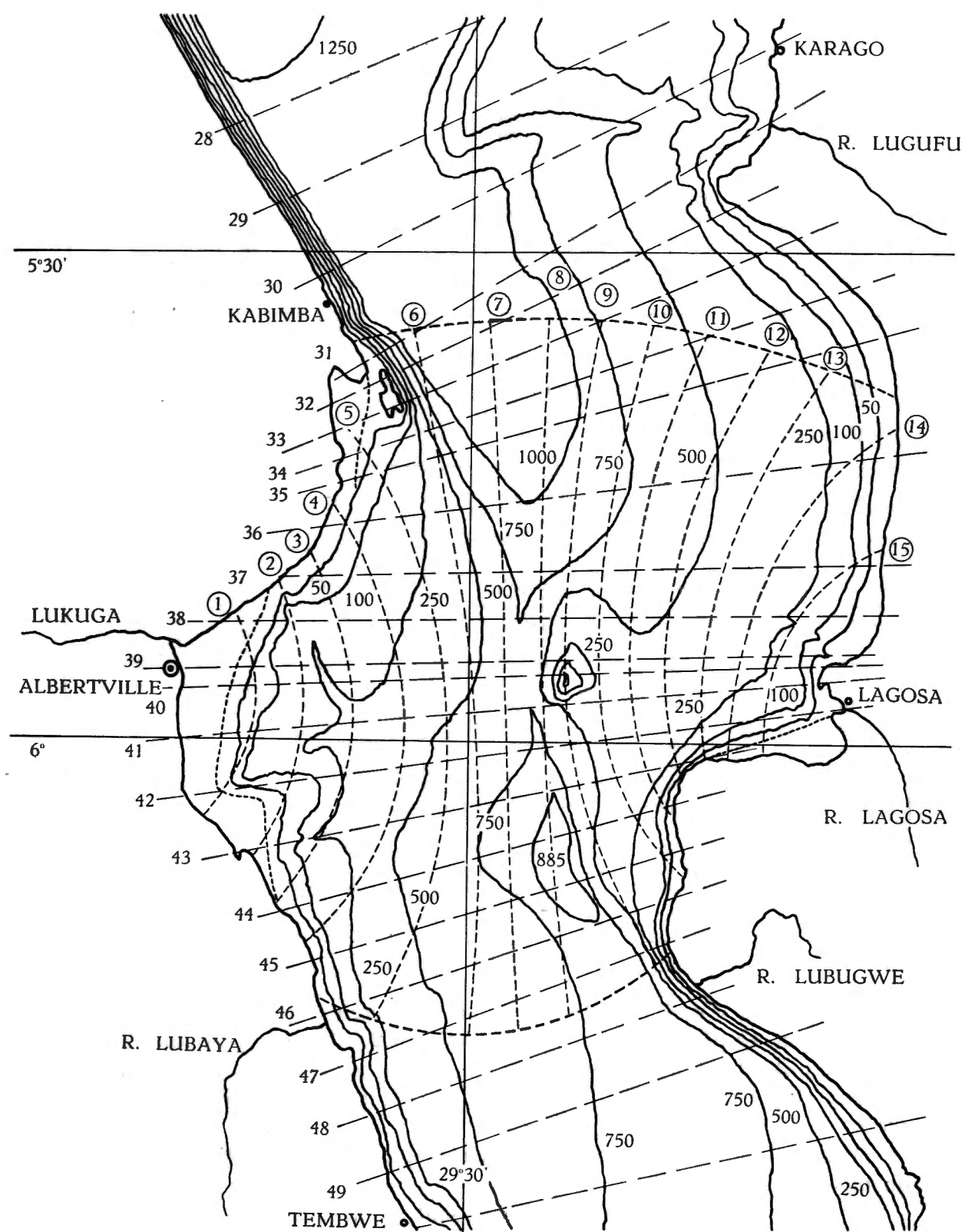


FIG. 59. — Lac Tanganika. Bassin d'Albertville. Carte bathymétrique.

1-15 : Divisions utilisées pour le calcul de la seiche transversale uninodale de 36 minutes, par coordonnées curvilignes.

[27-49 : Divisions utilisées pour le calcul des seiches longitudinales; cf. pp. 110 sqq.]

Section n°	Δv km ²	v km ²	S km ²	$\bar{\Delta\psi}$ km
8	400	2.179	64,98	5,2
7	410	2.589	63,14	5
6	400	2.989	52,35	5
5	442	3.431	25,10	5,5
4	360	3.791	13,19	5,5
3	250	4.041	7,50	5
2,1	185	4.226	4,312	5
0	332	4.558	0	6

2. Résultats numériques.

Essai avec $\lambda = 8,48 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$.

Section n°	ζ cm	u 10 ⁶ m ³	$\bar{\varphi}$ m	$\Delta\zeta$ cm
15	100,0000	174,0000	39,322	-23,3415
14	76,6585	342,6487	36,804	-18,7259
13	57,9326	481,4076	31,241	-13,7760
12	44,1566	589,7328	27,596	-11,7007
11	32,4559	673,7936	24,107	- 9,8125
10	22,6434	735,8365	24,277	- 9,2641
9	13,3793	784,9385	17,094	- 7,5378
8	5,8415	808,3045	12,439	- 5,4851
7	0,3564	809,7657	12,825	- 5,4378
6	- 5,0814	789,4401	15,080	- 6,3939
5	- 11,4753	738,7193	29,431	-13,7266
4	- 25,2019	647,9925	49,128	-22,9133
3	- 48,1152	527,7045	70,361	-29,8331
2,1	- 77,9483	383,5002	88,938	-37,7097
0	-115,6580	- 0,4844	—	—

Le « résidu » u_0 étant satisfaisant, on ne cherchera pas à améliorer λ par interpolation. La période correspondante est : $T = 2.181,8 \text{ sec.} \simeq 36 \text{ min. } 22 \text{ sec.}$

L'accord est médiocre avec le résultat obtenu par la méthode de l'équation en $w(x)$ ($T = 1.882 \text{ sec.} = 31 \text{ min. } 25 \text{ sec.}$); l'écart atteint environ 16 % par excès.

Voici le graphique du profil de la seiche et celui de la fonction propre $u(v)$ du mode étudié.

On remarque que les dénivellations sont sensiblement les mêmes à l'est qu'à l'ouest, conformément à ce que l'on peut attendre si l'on examine les courbes isobathes du lac.

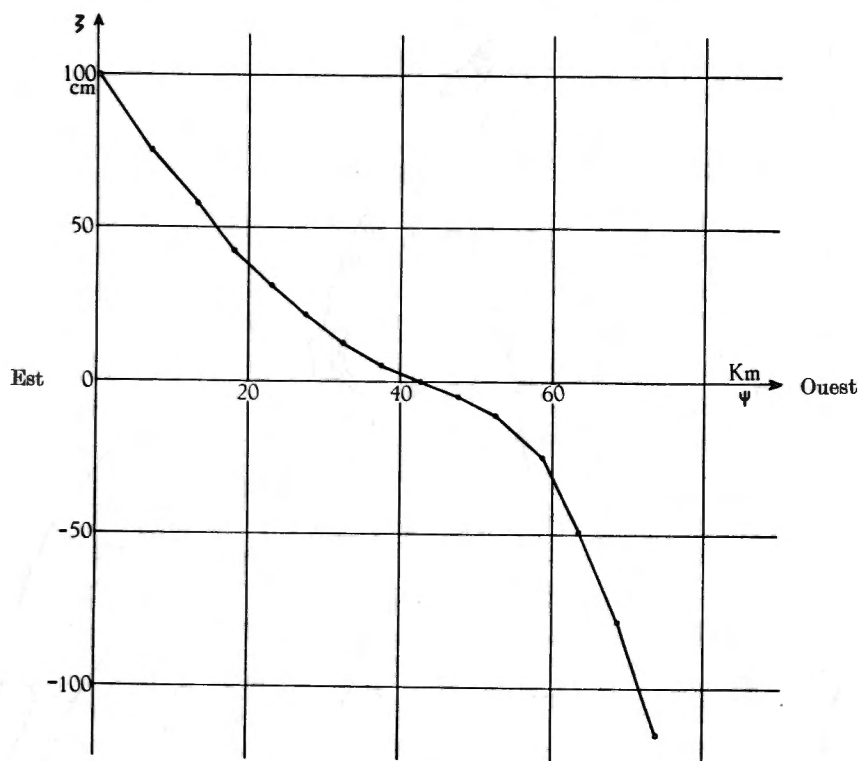


FIG. 60. — Lac Tanganika. Bassin d'Albertville.
Profil de la seiche uninodale transversale de 36 minutes.

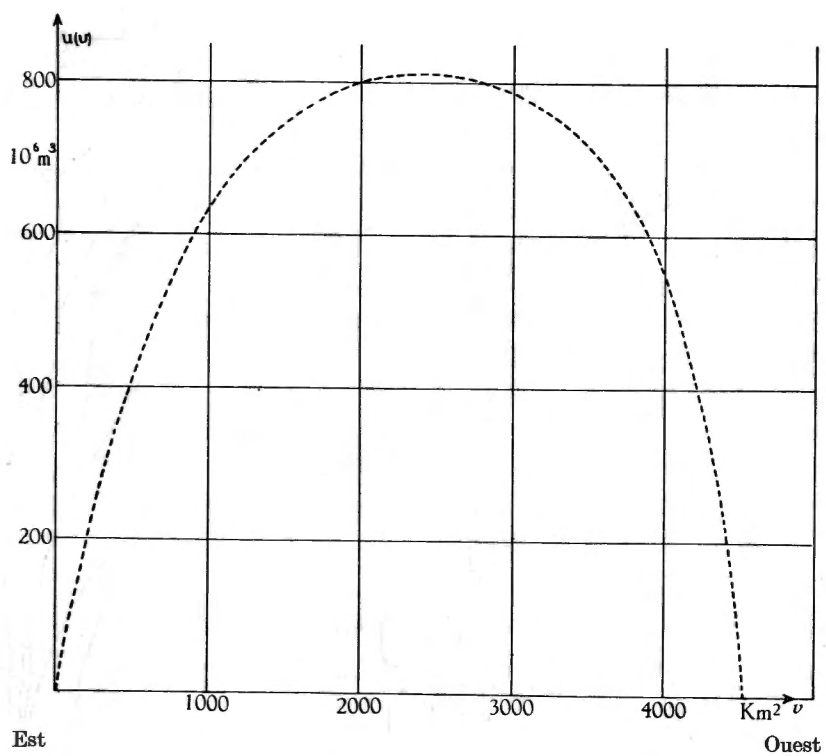


FIG. 61. — Lac Tanganika. Bassin d'Albertville.
Fonction propre $u(v)$ du mode fondamental transversal.

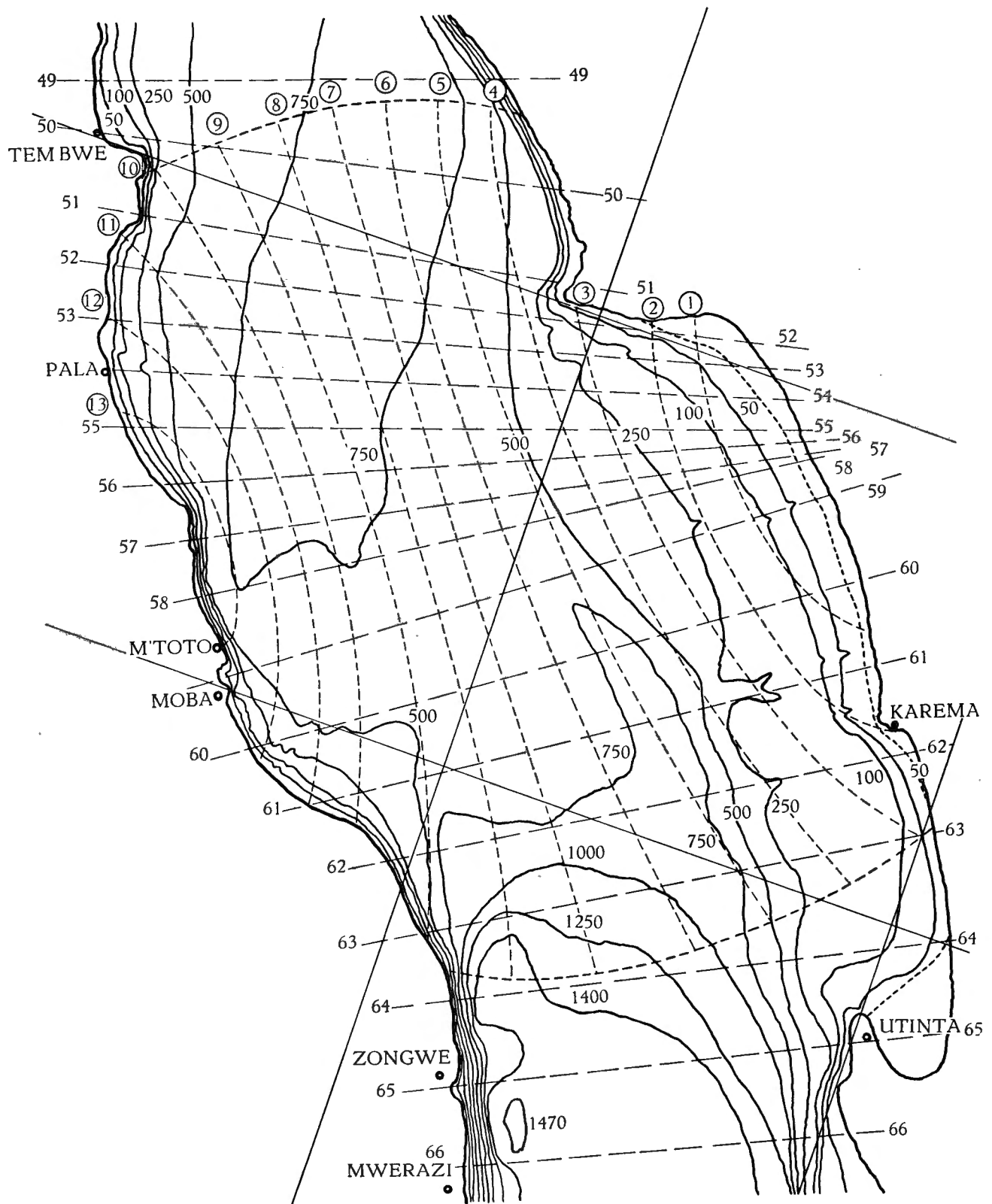


FIG. 62. — Lac Tanganika. Bassin de Moba. Carte bathymétrique.

1-13 Divisions utilisées pour le calcul de la seiche transversale uninodale de 30 minutes, par coordonnées curvilignes.

[49-66 : Divisions utilisées pour le calcul des seiches longitudinales; cf. pp. 110 sqq.]

C. Bassin de Moba. — On a tracé treize courbes d'égale dénivellation ($\zeta = \text{const.}$) numérotées d'est en ouest (cf. fig. 62).

1. Mesures.

Section n°	Δv km ²	v km ²	S km ²	$\Delta \bar{\psi}$ km
1	173	173	2,737	6
2	235	408	8,262	5
3	398	806	16,11	5
4	555	1.361	39,44	6
5	676	2.037	70,62	6,5
6	650	2.687	81,06	6,5
7	702	3.389	83,50	6,5
8	620	4.009	83,82	6
9	631	4.640	62,25	6
10	540	5.180	49,45	6
11	392	5.572	42,75	5
12	352	5.924	32,27	5,5
13	243	6.167	18,45	5
14	102	6.269	—	—

2. Résultats numériques.

Essai avec $\lambda = 12,125 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, c'est-à-dire $T = 1.824,6 \text{ sec.} \approx 30 \text{ min}$
25 sec.

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	$\bar{\varphi}$ m	$\Delta \zeta$ cm
1	100,0000	173,0000	63,2079	-45,9837
2	54,0163	299,9383	36,3034	-22,0089
3	32,0074	427,3278	26,5256	-16,0811
4	15,9263	515,7188	13,0760	- 9,5128
5	6,4136	559,0747	7,9167	- 6,2393
6	0,1743	560,2076	6,9110	- 5,4467
7	- 5,2724	523,1954	6,2658	- 4,9382
8	-10,2106	459,8897	5,4866	- 3,9915
9	-14,2021	370,2745	5,9482	- 4,3273
10	-18,5294	270,2157	5,4644	- 3,9753
11	-22,5047	181,9973	4,2572	- 2,5809
12	-25,0856	93,6960	2,9035	- 1,9363
13	-27,0219	28,0328	1,5194	- 0,9211
14	-27,9430	- 0,4691	—	—

Un essai précédent, effectué avec $\lambda = 12,00 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, ayant laissé un « résidu » u_{14} de $14,6151 \times 10^6 \text{ m}^3$, l'écart est trop considérable pour permettre

une interpolation linéaire destinée à améliorer le λ trouvé ici; ce dernier sera donc considéré comme « exact ».

L'accord est fort satisfaisant avec le résultat trouvé par la méthode de l'équation en $w(x)$ ($T=1.872$ sec. = 31 min. 12 sec.), puisque l'écart n'est que de 2 %.

Voici le graphique du profil de la seiche. Comme pour le bassin de Nyanza, l'amplitude de la dénivellation est beaucoup plus forte que sur la côte est (pente douce) que sur la côte ouest (parois plus abruptes).

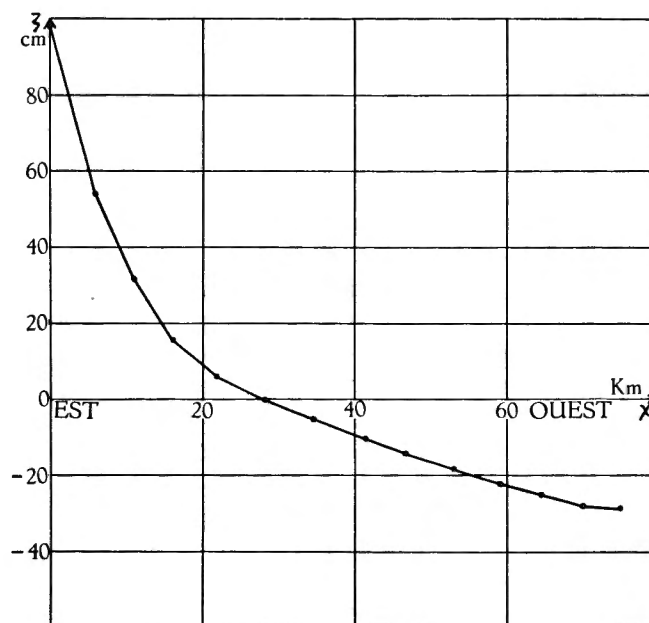


FIG. 63. — Lac Tanganika. Bassin de Moba.
Profil de la seiche transversale uninode de 30 minutes.

Enfin, pour terminer l'étude du bassin de Moba, donnons encore le graphique de la fonction propre de la seiche qui vient d'être calculée.

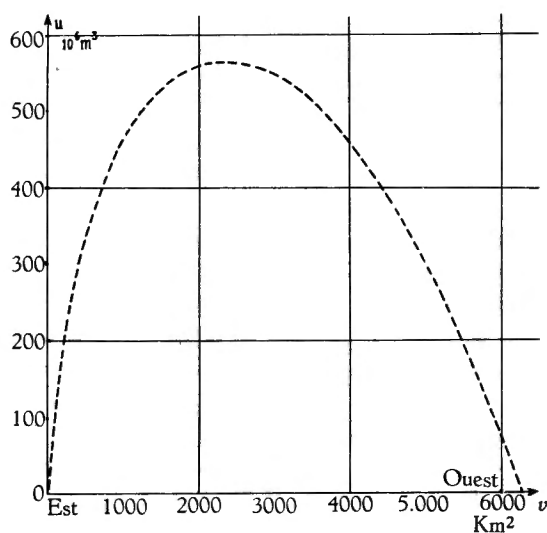


FIG. 64. — Lac Tanganika. Bassin de Moba.
Fonction propre $u(v)$ du mode fondamental transversal.

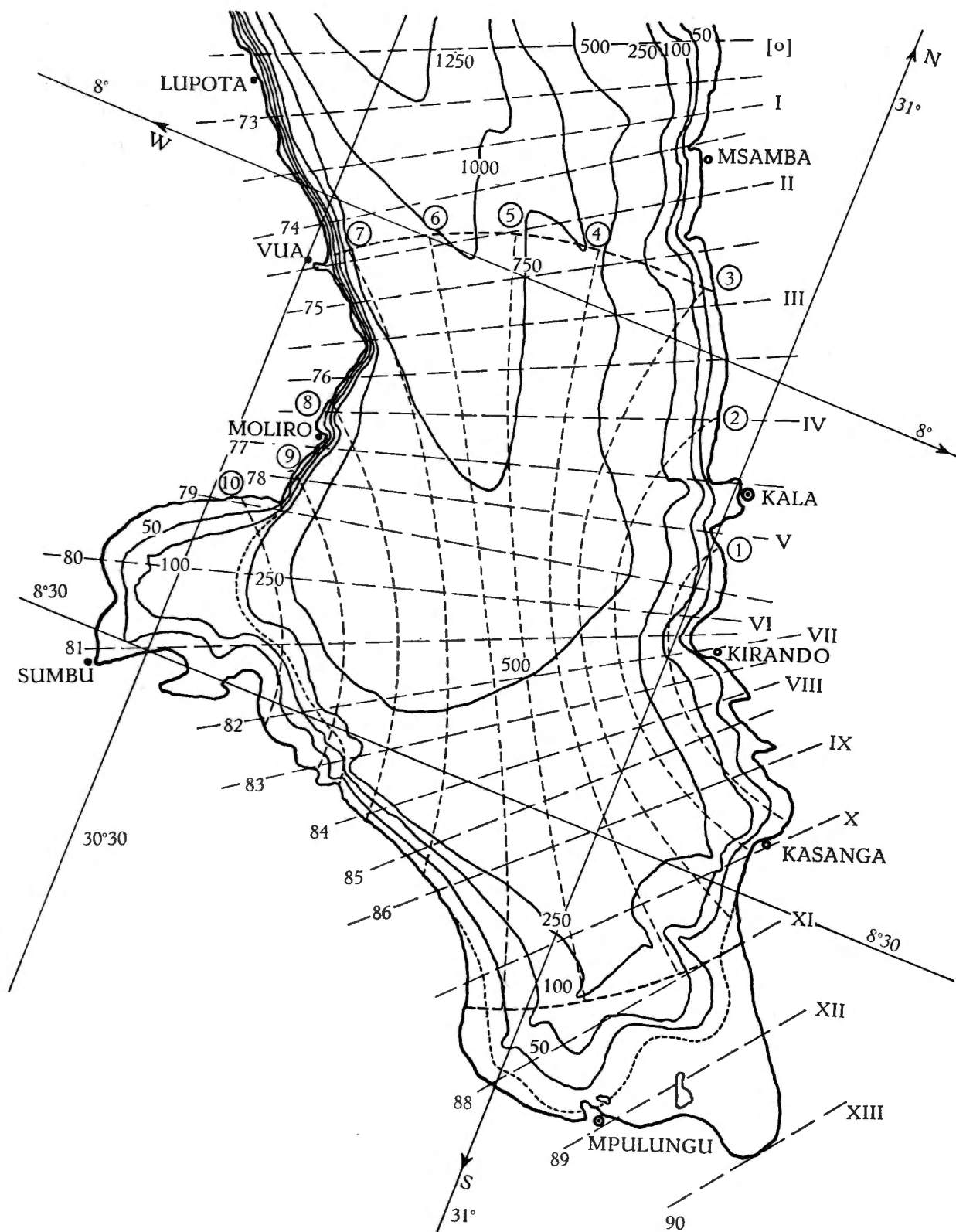


FIG. 65. — Lac Tanganika. Bassin de Kala. Carte bathymétrique.

1-10 : Divisions utilisées pour le calcul de la seiche transversale uninodale de 27 minutes, par coordonnées curvilignes.

[73-90 : Divisions utilisées pour le calcul des seiches longitudinales; cf. pp. 110 sqq.]

[I-XIII : Anciennes divisions ayant servi à des calculs de seiches transversales par la méthode de l'équation en $w(x)$, non repris dans ce travail; I-XII (anciennes) correspondent à IX-XX (nouvelles, cf. p. 247)].

D. Bassin de Kala. — On a tracé au juger dix lignes d'égalé dénivellation, numérotées d'est en ouest.

Les mesures se rapportent aux divisions « principales » (à l'aide desquelles seules on a calculé la seiche uninodale); en effet, pour calculer la binodale, on a eu recours à des divisions « secondaires », pour lesquelles S et v ont été calculées par interpolation linéaire, chaque division secondaire étant située à mi-distance des deux divisions principales avoisinantes. Ces valeurs interpolées sont en italique, et numérotées $1a$, $2a$, etc.

1. Mesures.

Section n°	Δv km ²	v km ²	S km ²	$\Delta\bar{\psi}$ km
1	130	130	3,4375	4
1a	145	275	11,1375	3
2	145	420	18,937	3
2a	195	615	23,869	2,5
3	195	810	28,800	3
3a	250	1.060	35,412	3
4	250	1.310	42,025	3
4a	278	1.588	49,919	3
5	279	1.867	57,812	3
5a	282	2.149	53,969	3
6	283	2.432	50,125	3
6a	245	2.677	45,937	3
7	245	2.922	41,750	3
7a	184	3.106	31,781	3
8	185	3.291	21,812	3
8a	129	3.420	17,725	3
9	129	3.549	13,637	3
9a	101	3.650	8,8437	3
10	102	3.752	4,050	3,5
11	210	3.962	0	4

2. Résultats numériques.

a) Seiche uninodale. Essai avec $\lambda_1 = 15,11 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, c'est-à-dire $T_1 = 1.634,5 \text{ sec.} \approx 27 \text{ min. } 15 \text{ sec.}$

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	$\bar{\varphi}$ m	$\Delta\zeta$ cm
1	100,0000	130,0000	37,8182	- 22,8573
2	77,1427	353,7138	18,6780	- 16,9335
3	60,2092	588,5297	20,4351	- 16,9826
4	43,2266	804,6627	19,1472	- 17,3589

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	$\bar{\varphi}$ m	$\Delta\zeta$ cm
5	25,8677	948,7458	16,4107	- 14,8779
6	10,9898	1.010,8382	20,1663	- 18,2828
7	- 7,2930	975,1025	23,3557	- 21,1743
8	- 28,4673	870,0582	39,8881	- 36,1626
9	- 64,6299	703,3131	51,5720	- 46,7552
10	-111,3851	477,2013	117,8275	-115,7243
11	-227,1094	0,2716	—	—

Le « résidu » u_{11} étant pratiquement négligeable, la valeur propre essayée sera considérée comme « exacte ». La période obtenue est en parfait accord avec celle obtenue par le premier procédé ($T_1 = 1.635,4 \text{ sec.} \approx 27 \text{ min. } 15 \text{ sec.}$).

On trouvera plus loin des graphiques de la dénivellation ζ et de la fonction propre $u(v)$ de ce premier mode.

b) Seiche binodale.

Essai avec $\lambda_2 = 32,40 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$, c'est-à-dire $T_2 = 1.116,2 \text{ sec.} \approx 18 \text{ min. } 36 \text{ sec.}$

Section n°	ζ cm	u 10^6 m^3	$\bar{\varphi}$ m	$\Delta\zeta$ cm
1	100,0000	130,0000	37,8182	-49,0124
1a	50,9876	203,9320	18,2286	-17,7182
2	33,2694	252,1726	13,3160	-12,9432
2a	20,3262	291,8087	12,2256	- 9,9027
3	10,4235	312,1345	10,8380	-10,5345
3a	- 0,1110	311,8570	8,8064	- 8,5598
4	- 8,6708	290,1800	6,9049	- 6,7116
4a	-15,3824	247,4172	4,9564	- 4,8176
5	-20,2000	191,0592	3,3048	- 3,2123
5a	-23,4123	125,0365	2,3168	- 2,2519
6	-25,6642	52,4068	1,0455	- 1,0162
6a	-26,6804	- 12,9602	- 0,2821	0,2742
7	-26,4062	- 77,6554	- 1,8600	1,8079
7a	-24,5983	-122,9163	- 3,8676	3,7593
8	-20,8390	-161,4684	- 7,4026	7,1953
8a	-13,6437	-179,0688	-10,1026	9,8197
9	- 3,8240	-184,0018	-13,4923	13,1145
9a	9,2905	-174,6184	-19,7449	19,1920
10	28,4825	-145,5663	-35,9423	40,7586
11	69,2411	- 0,1602	—	—

L'écart entre la période ici obtenue ($T_2 = 1.116$ sec.) et celle calculée par le premier procédé ($T_2 = 847$ sec.) est considérable — de l'ordre de 24 % par rapport au dernier résultat ($T_2 = 1.116$ sec.). Les conditions de lente variation de b et de b' étant médiocrement satisfaites dans le bassin de Kala (cf. pp. 230 sqq.), on considérera la période trouvée par la méthode des coordonnées curvilignes comme plus probable que celle obtenue par l'équation en $w(x)$ (pp. 248-250).

Les graphiques ci-après représentent les profils des deux seiches qui viennent d'être calculées, et les fonctions propres correspondantes. En ce qui concerne les profils, on remarquera une fois de plus les rapports des amplitudes de ζ sur les côtes est et ouest : les bas-fonds de la côte ouest ont pour effet d'exalter considérablement les dénivellations.

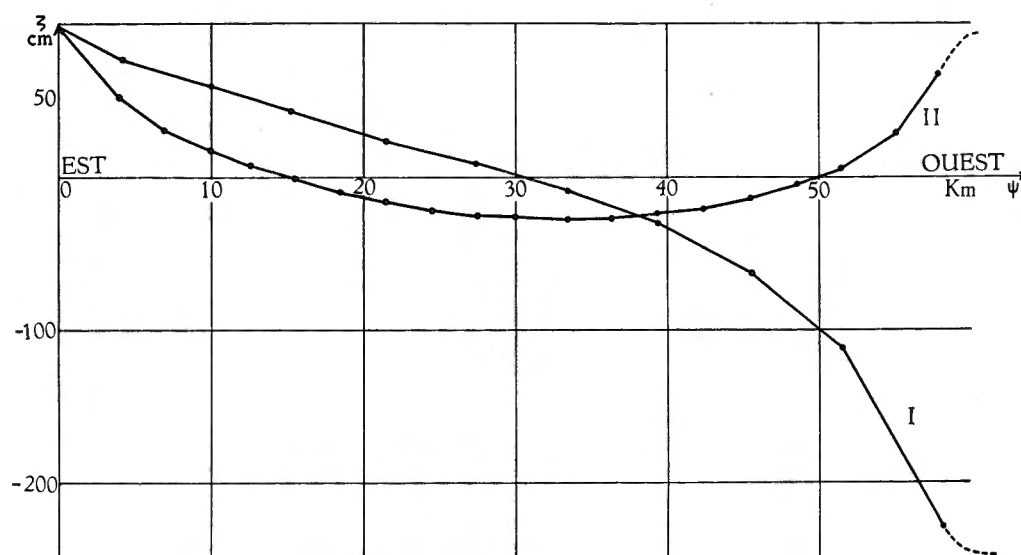


FIG. 66. — Lac Tanganika. Bassin de Kala.
Profils des seiches transversales uninodale ($T_1 \simeq 27$ min.) et binodale ($T_2 \simeq 18$ min.).

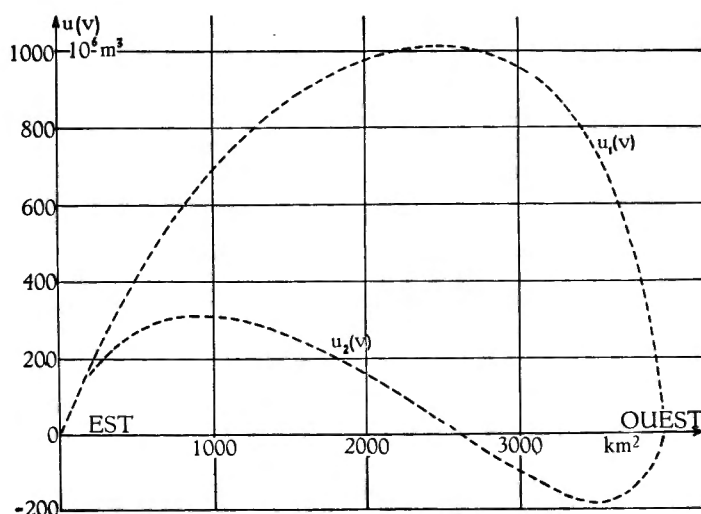


FIG. 67. — Lac Tanganika. Bassin de Kala.
Fonctions propres $u_1(v)$ et $u_2(v)$
des deux premiers modes normaux transversaux.

c) Orthogonalité.

Comme pour les modes normaux longitudinaux calculés dans la première partie, on devra avoir ici, pour des fonctions normées :

$$\int_0^a \frac{u_i u_j}{\sigma(v)} dv = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j), \end{cases}$$

ou, plus simplement (en désignant ici par l la largeur « moyenne » de la portion de lac considérée) :

$$\int_0^l u_i \bar{\varphi}_j d\bar{\psi} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

Vérifions si ces relations ont lieu pour les deux modes calculés. On a calculé séparément, à titre de contrôle, $u_1 \bar{\varphi}_2$ et $u_2 \bar{\varphi}_1$; les intervalles étant pratiquement égaux (à l'exception du premier, traité séparément, comme un triangle), on peut appliquer la règle de SIMPSON.

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^l u_1 \bar{\varphi}_1 d\bar{\psi} &= 11.106,2208 \times 10^4 \text{ m}^5; \\ \int_0^l u_2 \bar{\varphi}_2 d\bar{\psi} &= 931,5842 \times 10^4 \text{ m}^5; \\ \int_0^l u_1 \bar{\varphi}_2 d\bar{\psi} &= -94,2080 \times 10^4 \text{ m}^5 = \int_0^l u_2 \bar{\varphi}_1 d\bar{\psi}. \end{aligned}$$

Le quotient du dernier nombre par la norme, produit des racines carrées des deux premiers nombres, égale — 0,0293, résultat qui permet de conclure à une orthogonalité satisfaisante.

CHAPITRE IV.

**« SHELF-SEICHES », « EDGE-WAVES » DE STOKES,
« BANK-SEICHES » ET SEICHES DANS LES DÉTROITS.**

Les quatre « types » d'oscillations étudiés dans ce dernier chapitre ne présentent entre eux qu'une parenté assez lointaine, et c'est plutôt pour la commodité qu'on les a réunis ici.

Ainsi, tandis que les « shelf-seiches », « bank-seiches » et seiches de détroits sont des ondes du type marée, les « edges-waves » de STOKES au contraire appartiennent au type des ondes de surface (cf. p. 17). Les « bank-seiches »,

du moins sous la forme où elles furent envisagées par K. HIDAOKA ⁽¹⁰⁶⁾, sont des oscillations à une seule dimension horizontale (dans le paragraphe ci-après qui leur est consacré on s'efforcera de traiter ce problème à deux dimensions, au moins dans un cas particulier), alors que les trois autres types d'oscillations sont à deux dimensions horizontales. Les seiches de détroit ont lieu, comme leur nom l'indique, dans une portion de mer limitée par deux côtes opposées et ouverte par ailleurs; les « edge-waves » de STOKES et les « shelf-seiches » se produisent dans une mer limitée par une seule côte (problème à une dimension horizontale) ou dans un golfe sensiblement rectangulaire (problème à deux dimensions horizontales); enfin, les « bank-seiches » se produisent en haute mer, c'est-à-dire dans une masse d'eau que ne limite aucune côte.

Les résultats de la théorie des « shelf-seiches » et des « edge-waves » de STOKES feront l'objet d'une application numérique au lac Tanganika (cf. § 3).

§ 1. LES « SHELF-SEICHES ».

La question fut soulevée par K. HIDAOKA ⁽¹⁰⁷⁾ de savoir quels types d'oscillation libre peuvent apparaître sur une côte en pente douce, limitant un océan infini (problème à une dimension horizontale). L'auteur l'envisage à titre de cas particulier d'un autre problème, à savoir si des « seiches » sont possibles en pleine mer, loin de toute côte, au-dessus d'un haut-fond (article de la note 106); il traite le cas d'un haut-fond hyperbolique, pour lequel il trouve des solutions apparentées aux fonctions de MATHIEU : une classe de solutions paires (ou symétriques par rapport au sommet du haut-fond) et une autre de solutions impaires (ou antisymétriques par rapport à ce sommet) (cf. § 4); les premières continuent à être recevables si un petit mur vertical, jouant le rôle d'une côte, se trouve au sommet du haut-fond. Cette théorie, ainsi que le problème initial dont elle se déduit, seront traités au § 4 ci-après. En attendant, faisons la théorie du cas le plus simple possible : une côte plane inclinée bornant un océan infini (problème à une dimension horizontale), ou bornant un canal de largeur constante (problème à deux dimensions horizontales). Pour plus de généralité, considérons directement le cas à deux dimensions; on en déduira facilement (p. 272) la théorie du cas à une seule dimension.

A. — Soit donc un lac-canal de largeur constante, égale à b_0 , de profondeur constante dans le sens de la largeur (axe Oy) et variable dans le sens de la longueur (axe Ox) : $h(x, y) = h(x) = \beta x$, quantité mesurée positivement vers le bas ($\beta > 0$, grandeur sans dimensions physiques). Le lac s'étend à l'infini vers les x croissants et ses deux rives parallèles sont constituées par des murs verticaux situés en $y = b_0/2$ et $y = -b_0/2$ (cf. fig. 68).

⁽¹⁰⁶⁾ HIDAOKA, K., *Seiches due to a Submarine Bank* (« Bank-Seiches »), Mem. Imp. Mar. Obs., Kobe, VI, 1 (1935), pp. 1-8.

⁽¹⁰⁷⁾ HIDAOKA, K., *A Theory of Shelf-Seiches*, Mem. Imp. Mar. Obs., Kobe, VI, 1 (1935), pp. 9-12.

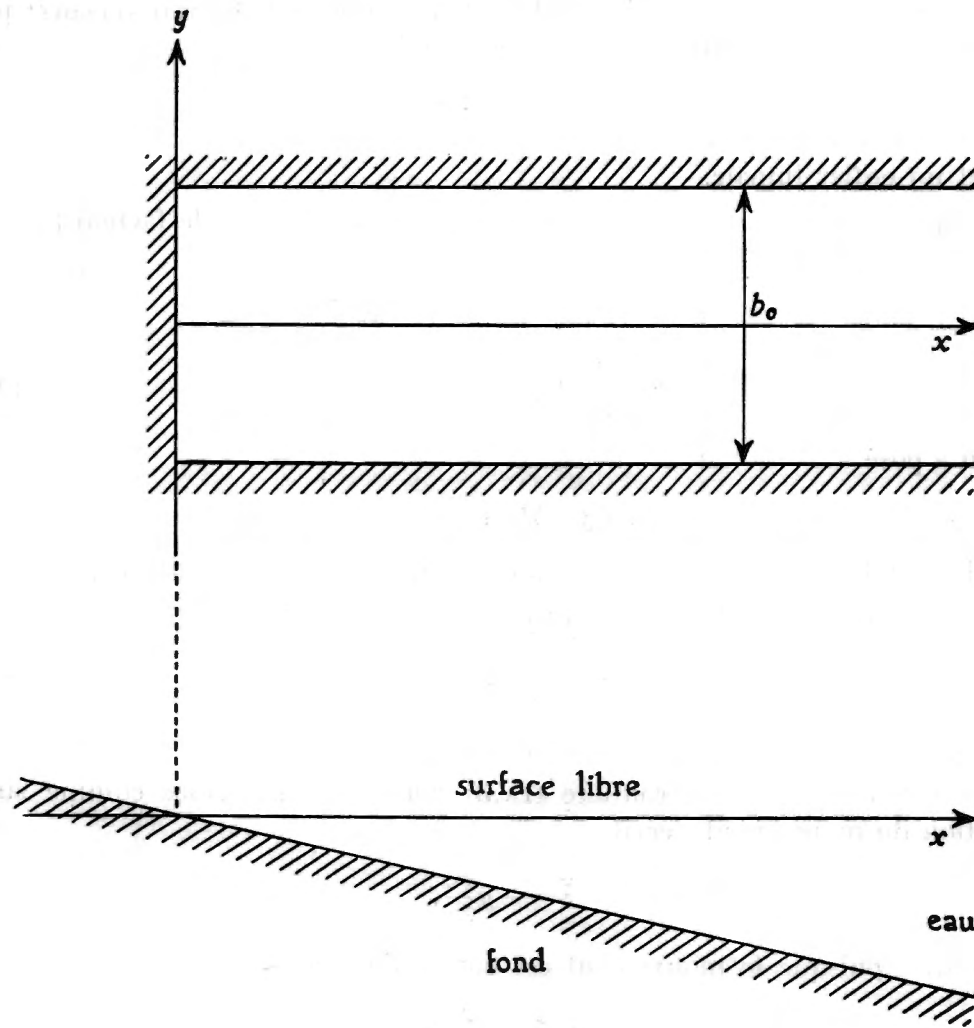


FIG. 68.

L'équation du mouvement (à deux dimensions) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + h(x) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{g} \zeta = 0, \quad (\text{IX.1})$$

et les conditions-frontière sont :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{y=\pm b_0/2} = 0; \quad \zeta = -\beta \xi \quad (\text{en } x=0); \quad \zeta(\infty) = 0. \quad (\text{IX.2-4})$$

Posons, afin de satisfaire à la condition-frontière (IX.2) :

$$\zeta = \cos \frac{p\pi y}{b_0} \cdot w(x),$$

où p est un nombre entier pair, égal au nombre de nœuds transversaux; pour les seiches d'ordre impair, il suffira de prendre

$$\zeta = \sin \frac{q\pi y}{b_0} \cdot w(x),$$

q étant un entier impair.

L'équation (IX.1) devient alors, après simplification par le facteur :

$$\cos \frac{p\pi y}{b_0} \quad \text{ou} \quad \sin \frac{q\pi y}{b_0} :$$

$$w'' + \frac{1}{x} w' + \left(\frac{\lambda'}{x} - k^2 \right) w = 0, \quad (\text{IX.1}')$$

où l'on a posé

$$\omega^2/g\beta = \lambda'; \quad \left(\frac{r\pi}{b_0} \right)^2 = k^2$$

(r désignant le nombre de nœuds transversaux, c'est-à-dire p ou q).

Changeons de variable en posant $kx = x'$. Il vient :

$$w'' + \frac{1}{x'} w' + \left(\frac{\mu}{x'} - 1 \right) w = 0, \quad (\text{IX.1}'')$$

où $\mu = \lambda'/k$, et où les dérivées sont prises par rapport à x' .

La seconde condition-frontière (IX.3) peut se transformer comme suit : l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\xi} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

c'est-à-dire, puisque le mouvement est harmonique ($\xi \sim e^{i\omega t}$) :

$$\omega^2 \xi = g \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Éliminant ξ entre cette dernière équation et (IX.3), il vient :

$$\zeta = -\frac{g\beta}{\omega^2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda'} \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

ou, en simplifiant par

$$\cos \frac{p\pi y}{b_0} \quad \text{ou} \quad \sin \frac{q\pi y}{b_0}$$

et en faisant apparaître la variable x' :

$$\mu w(0) + w'(0) = 0. \quad (\text{IX.3}')$$

Cette égalité se déduit du reste aisément de (IX.1'') : quand $x' \rightarrow 0$, les termes

$$\frac{1}{x'} w' + \frac{\mu}{x'} w$$

deviennent prépondérants (puisque ni w ni w'' ne sont infinis pour $x \rightarrow 0$); leur somme doit donc s'annuler quand $x' \rightarrow 0$, ce qui est précisément ce qu'exprime (IX.3').

Quant à la troisième condition-frontière (IX.4), l'équation (IX.1'') montre que la réalisation en est assurée puisque, pour $x' \rightarrow \infty$ (le champ de la variable x' étant le même que celui de la variable x), (IX.1'') devient $w'' - w = 0$, équation qui admet pour solution : $w = A e^{\pm x'}$ ($A =$ facteur constant quelconque); il suffit donc de prendre le signe négatif.

Essayons de résoudre (IX.1'') en posant

$$w(x') = e^{-x'} v(x'). \quad (\text{IX.5})$$

(IX.1'') prend ainsi la forme :

$$v'' + \left(\frac{1}{x'} - 2\right) v' + \frac{\mu - 1}{x'} v = 0. \quad (\text{IX.6})$$

En prenant une série potentielle en x' pour $v(x')$:

$$v(x') = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x'^{j+\alpha};$$

on trouve immédiatement que $\alpha = 0$; (IX.6) admet donc comme solution une série potentielle entière

$$v(x') = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x'^j,$$

et une solution logarithmique, irrecevable physiquement.

Calculons les coefficients de la première solution; on obtient la suite de relations récurrentes :

$$(j+1)^2 a_{j+1} + [\mu - (2j+1)] a_j = 0, \quad (j = 0, 1, 2 \dots) \quad (\text{IX.7})$$

dont la première $a_1 + (\mu - 1) a_0 = 0$ n'est autre que la condition-frontière (IX.3') transformée à l'aide de (IX.5), c'est-à-dire

$$v'(0) + (\mu - 1) v(0) = 0 \quad (\text{IX.5}')$$

Nous disposons dès lors du paramètre μ pour fixer le degré du polynôme

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x'^j;$$

en effet, il suffit de prendre $\mu = 2j + 1$, pour que tous les coefficients depuis a_{j+1} s'annulent, ainsi qu'il ressort des relations (IX.7). L'indice j est ainsi égal au degré du polynôme en x' que multiplie l'exponentielle, c'est-à-dire au nombre de nœuds longitudinaux de la seiche.

Faisons successivement :

$$j = 0, \quad \mu = 1: \quad a_1 = 0, \quad a_0 \text{ constante quelconque (réelle),}$$

$$w(x') = a_0 e^{-x'}: \quad \text{pas de nœuds longitudinaux.}$$

$$j = 1, \quad \mu = 3: \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -2a_0,$$

$$w(x') = a_0 e^{-x'} (1 - 2x'): \quad \text{un nœud longitudinal, en } x' = 1/2.$$

$$j = 2, \quad \mu = 5: \quad a_3 = 0, \quad a_2 = 2a_0, \quad a_1 = -4a_0,$$

$$w(x') = a_0 e^{-x'} (1 - 4x' + 2x'^2): \quad \text{deux nœuds, en } x' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x' = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

etc.

Orthogonalité des fonctions propres $w(x')$.

Convenons de les affecter d'un indice égal au nombre de nœuds longitudinaux; on vérifie alors facilement que pour $j \neq j'$,

$$\int_0^\infty w_j w_{j'} dx' = 0.$$

Si l'on veut en outre les normer, on devra prendre $a_0 = \sqrt{2}$.

On peut encore aboutir à la solution de (IX.1'') en raisonnant comme suit :

L'équation (IX.1'') montre qu'une solution asymptotique est $\sim e^{-2x'}$ ($x' \rightarrow \infty$). Écrivons donc que pour $x' \rightarrow \infty$, $v(x') = x'^\gamma (1 + c_1 x'^{-1} + c_2 x'^{-2} + \dots)$ et déterminons γ de manière à satisfaire à (IX.6).

Il vient ainsi, en n'écrivant que les termes en $x'^{\gamma-2}$ et en $x'^{\gamma-1}$:

$$\gamma(\gamma-1)x'^{\gamma-2} + \gamma x'^{\gamma-2} - 2\gamma x'^{\gamma-1} + (\mu-1)x'^{\gamma-1} = 0.$$

Si x' devient très grand, les deux premiers termes deviennent négligeables devant les deux derniers, et il reste :

$$(\mu-1) - 2\gamma = 0.$$

Pour $x' \rightarrow 0$, $v(x')$ se comporte comme $x'^\theta (1 + b_1 x' + b_2 x'^2 + \dots)$; déterminons θ à l'aide de (IX.6) : il vient de même que ci-dessus :

$$\theta(\theta-1)x'^{\theta-2} + \theta x'^{\theta-2} - 2\theta x'^{\theta-1} + (\mu-1)x'^{\theta-1} = 0.$$

Cette fois, ce sont les deux premiers termes qui sont prépondérants, ce qui exige $\theta = 0$.

Écrivons enfin que les deux développements sont en réalité identiques, c'est-à-dire identifions la plus haute puissance du premier avec la plus haute puissance du second; on trouve ainsi :

$$\gamma = \frac{\mu-1}{2} = j, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mu = 2j + 1,$$

($b_j x'^j$ étant le dernier terme du polynôme ordonné par puissances croissantes de x' : $1 + b_1 x' + b_2 x'^2 + \dots + b_j x'^j$).

Il suffit maintenant de faire $j = 0, 1, 2, \dots$ pour pouvoir calculer les coefficients du polynôme, comme il a été fait ci-dessus.

Comparaison avec un lac de profondeur constante.

Considérons un lac-canal, de largeur égale à b_0 , de longueur indéfinie, et voyons pour quelles profondeurs ses oscillations (qu'on peut continuer à appeler latérales, bien que le problème soit à une seule dimension) auront la même période que celles (latérales, mais modulées longitudinalement en amplitude) du lac de profondeur variable qui vient d'être étudié.

On a, pour le canal de profondeur constante, la formule dite de MERIAN :

$$T_r = \frac{2l}{r \sqrt{gh_0}}, \quad \text{dont on tire} \quad \lambda_r = \left(\frac{r \pi}{l} \right)^2 h_0, \quad (\text{IX.8})$$

(r = nombre de nœuds, l = longueur du bassin).

Il est essentiel de noter que cette formule n'est applicable que si la profondeur h_0 reste très petite devant l/r .

Pour le lac-canal de profondeur variable (fond plan incliné) on a trouvé

$$\lambda_{rj} \equiv \mu k = (2j + 1) \cdot \frac{r \pi}{b_0},$$

(r = nombre de nœuds transversaux, j = nombre de nœuds longitudinaux).

Égalons ces deux valeurs propres, en remarquant que le rôle de l est joué par b_0 et que h_0 est l'inconnue à déterminer; il vient

$$\frac{r^2 \pi^2}{b_0^2} h_0 = (2j + 1) \cdot \frac{r \pi}{b_0},$$

ou

$$h_0 = \frac{2j + 1}{r \pi} b_0. \quad (\text{IX.9})$$

En vertu de la remarque ci-dessus ($h_0 \ll b_0/r$ nécessaire pour que la formule (IX.8) soit applicable), on voit que pour $j = 1$ déjà la formule (IX.9) devient inacceptable, car elle donne $h_0 \simeq b_0/r$.

C'est seulement pour le fondamental transversal (sans nœuds longitudinaux pour le lac de profondeur variable : $j = 0$) que le résultat est quelque peu satisfaisant :

$$h_0 = \frac{b_0}{\pi} \quad (r = 1).$$

Unité naturelle de longueur.

Avec la variable

$$x' = kx = \frac{r \pi}{b_0} x$$

on aura

$$x' = 1, 2, \dots \text{ pour } x = b_0/r\pi, 2b_0/r\pi, \dots$$

L'unité naturelle de longueur est ainsi $b_0/r\pi$; c'est-à-dire la demi-longueur d'onde de la seiche transversale ($r =$ nombre de nœuds transversaux !), divisée par π .

B. — Considérons ensuite le problème à une seule dimension horizontale : au lieu d'un lac-canal, nous aurons maintenant un océan infini à une seule côte, à fond plan incliné.

L'équation (IX.1) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \frac{\omega^2}{g} \zeta = 0, \quad (\text{IX.10})$$

avec les conditions-frontière (IX.3-4), la condition (IX.2) disparaissant. Puisque $h(x) = \beta(x)$, l'équation (IX.10) devient, après simplifications :

$$w'' + \frac{1}{x} w' + \frac{\lambda'}{x} w = 0, \quad (\text{IX.10}')$$

où l'on a posé $\omega^2/g\beta = \lambda'$.

La condition-frontière (IX.3) se transforme comme précédemment et devient :

$$\lambda' w(0) + w'(0) = 0, \quad (\text{IX.3}'')$$

tandis que la condition (IX.4) est réalisée automatiquement. L'équation (IX.10') est identique à l'équation (I.15) (cf. p. 38) et admet comme solution

$$w(x) = J_0(2\sqrt{\lambda'x}).$$

La relation (IX.3) se réduit à :

$$\lambda' J_0(x) + \sqrt{\lambda'x} \cdot J_0'(x) = 0$$

où l'on fait $x=0$, c'est-à-dire à :

$$\sqrt{\lambda'} \cdot J_0'(0) = 0,$$

c'est-à-dire à une identité. Toutes les périodes d'oscillation sont donc possibles; le nombre de nœuds est toujours infini (puisque la fonction J_0 possède une infinité de zéros) : ils sont donnés par

$$J_0(2\sqrt{\lambda'x}) = 0,$$

c'est-à-dire que leurs abscisses sont proportionnelles aux carrés des périodes ⁽¹⁰⁸⁾.

Avant d'appliquer ces résultats à l'un des lacs étudiés dans ce travail, nous donnerons un aperçu de la théorie des « edge-waves » de STOKES, qui conduit

(108) Cf. LAMB, H., *op. cit.*, p. 276.

pour le cas traité ci-dessus à des résultats numériques très voisins de ceux fournis par la théorie des « shelf-seiches ».

C'est ce qui sera illustré par les calculs effectués au § 3.

§ 2. LES « EDGE-WAVES » DE G. STOKES.

Le problème ne diffère de celui des « shelf-seiches » de K. HIRAKA (cf. § 1) que sur un point; au lieu de négliger l'accélération verticale des particules du liquide, on la fait intervenir dans les calculs, c'est-à-dire qu'au lieu d'un problème d'ondes de marée, nous avons maintenant un problème d'ondes de surface (cf. pp. 17 sqq.). G. STOKES ⁽¹⁰⁹⁾ considère :

A. — Un océan s'étendant à l'infini en longueur et en largeur, bordé par une seule côte, et dont le fond est un plan incliné.

Choix des axes : Oy coïncide avec la côte, Ox lui est perpendiculaire et est situé dans le plan de la surface libre de l'eau, Oz est perpendiculaire à Ox et à Oy (donc vertical), et orienté positivement vers le haut (cf. fig. 69).

Le fond plan fait avec l'horizontale un angle β ; il a donc pour équation $h(x) = x \operatorname{tg} \beta$.

Convenons d'appeler « longueur » la dimension parallèle à Ox et « largeur » celle parallèle à la côte. Il est à remarquer que le choix des axes adopté ici diffère de celui de G. STOKES et H. LAMB ⁽¹¹⁰⁾ par la substitution de x à y et vice versa; ceci a pour but de maintenir les notations adoptées dans les chapitres précédents, où l'axe Ox est invariablement « longitudinal » et Oy « transversal ».

L'océan étant infini en largeur, des oscillations de longueur d'onde quelconque pourront se produire dans le sens de l'axe Oy , puisqu'il n'y a pas de condition-frontière en y qui assigne des valeurs particulières à ces longueurs d'onde; par suite de la faible profondeur au voisinage de la côte, l'amplitude de ces oscillations y sera plus forte qu'à quelque distance en mer.

La solution trouvée par STOKES pour le potentiel des vitesses est :

$$\varphi = H \cdot e^{-k(x \cos \beta - z \sin \beta)} \cdot \cos k(y - ct), \quad (\text{IX.11})$$

où H est une constante de dimensions L^2T^{-1} .

$k = 2\pi/\Lambda$, Λ = longueur d'onde de la vague.

c = vitesse de propagation (latérale) de la vague, $= \omega/k = \Lambda/T$, ($\omega = 2\pi/T$ comme d'habitude).

⁽¹⁰⁹⁾ STOKES, G., *Report on Recent Researches on Hydrodynamics*, Brit. Assoc. Reports, 1846 (= Papers, I, p. 167).

⁽¹¹⁰⁾ LAMB, H., *op. cit.*, § 260, pp. 447-448.

On remarque que l'expression $x \cos \beta - z \sin \beta$ n'est autre que la projection, sur le fond, de la distance à l'origine d'un point de la surface en oscillation (x, z) (cf. fig. 69).

Le problème étant posé en ondes de surface, on a ⁽¹¹¹⁾

$$\zeta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} \simeq \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0}$$

(la dénivellation ζ étant très faible par rapport à la profondeur).

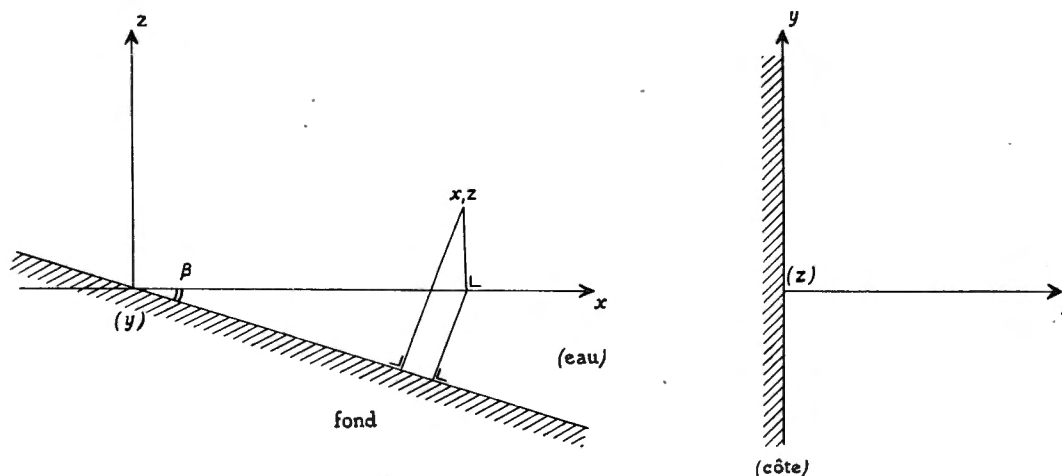


FIG. 69.

Il vient donc, pour le cas présent :

$$\zeta \simeq \frac{kc}{g} \cdot H \cdot e^{-kx \cos \beta} \cdot \sin k(y - ct). \quad (\text{IX.12})$$

Mais par ailleurs on a ⁽¹¹²⁾ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0}$$

d'où (ici)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -k \sin \beta \cdot H \cdot e^{-kx \cos \beta} \cdot \cos k(y - ct), \quad (\text{IX.13})$$

et, en intégrant :

$$\zeta = \frac{H}{c} \sin \beta \cdot e^{-kx \cos \beta} \cdot \sin k(y - ct). \quad (\text{IX.13}')$$

⁽¹¹¹⁾ *Id.*, *op. cit.*, § 227, pp. 363-364.

⁽¹¹²⁾ *Id.*, *op. cit.*, § 227, p. 363.

Identifiant les deux expressions donnant ζ (IX.12 et 13') on obtient immédiatement :

$$c^2 = \frac{g}{k} \sin \beta \quad \text{c'est-à-dire} \quad c = \sqrt{\frac{g}{k} \sin \beta}; \quad (\text{IX.14})$$

c'est l'expression donnée par STOKES ⁽¹¹³⁾.

Comme on a $c = \Lambda/T = 2\pi/kT$, on tire de (IX.14)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{gk \sin \beta}} = \sqrt{\frac{2\pi \Lambda}{g \sin \beta}}. \quad (\text{IX.15})$$

La formule (IX.12) montre clairement la décroissance exponentielle de l'amplitude des oscillations à mesure qu'on s'éloigne de la côte; elle montre également que, dans le problème des « edge-waves » tel que l'a posé G. STOKES, il n'y a pas de nœuds longitudinaux à envisager, contrairement à ce qui a lieu dans le problème analogue d'ondes de marée.

B. — Supposons maintenant que la masse d'eau, au lieu de s'étendre à l'infini dans les deux sens de l'axe Oy , soit de largeur finie, constante, égale à b_0 ; on obtient ainsi un problème à deux dimensions horizontales, avec la condition-frontière en y (murs verticaux en $y = \pm b_0/2$).

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_{y=\pm b_0/2} = 0, \quad (\text{IX.2})$$

(les axes étant les mêmes qu'au § 1, cf. pp. 266-267).

L'égalité (IX.13') devient ici, en considérant des ondes stationnaires résultant de la superposition d'ondes progressives de même amplitude et de vitesses opposées :

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{H}{c} \sin \beta \cdot e^{-kx \cos \beta} \cdot [\sin k(y - ct) + \sin k(y + ct)], \\ &= \frac{2H}{c} \sin \beta \cdot e^{-kx \cos \beta} \cdot \sin ky \cdot \cos kct, \\ &= \zeta_0 e^{-\frac{2\pi x}{\Lambda} \cos \beta} \cdot \sin \frac{2\pi}{\Lambda} y \cdot \cos \omega t, \quad (k = 2\pi/\Lambda = \omega/c). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.16})$$

Dans le problème des « shelf-seiches » on avait, pour la seiche à un nœud transversal et sans nœud longitudinal :

$$\zeta = \zeta_0 e^{i\omega t} \cdot \sin \frac{\pi y}{b_0} \cdot e^{-kx}. \quad (\text{IX.17})$$

Si l'on remarque que dans (IX.16), $\Lambda = 2b_0$ et que $k = \pi/b_0$ dans (IX.17), on voit que (IX.16) et (IX.17) ne diffèrent que par un facteur constant qui multiplie x dans l'exponentielle amortie : dans le cas des « edge-waves », la distance depuis la côte est mesurée par la projection de l'abscisse sur le fond plan

⁽¹¹³⁾ *Id.*, *op. cit.*, § 260, formule 11.

incliné du lac, alors que dans le problème d'ondes de marée « shelf-seiches » elle est mesurée par cette abscisse elle-même. Ces deux grandeurs ne diffèrent que par un facteur constant, à savoir $\cos \beta$: par conséquent, si l'inclinaison du fond est très faible ($\cos \beta \sim 1$), on aboutira pratiquement aux mêmes périodes d'oscillations transversales sans nœud longitudinal, que l'on traite le problème en ondes de surface ou en ondes de marée.

La comparaison entre « shelf-seiches » et « edge-waves » ne pourra donc se faire que pour les « shelf-seiches » sans nœuds longitudinaux.

§ 3. APPLICATION AU LAC TANGANIKA (extrémité nord).

Ainsi qu'on peut le voir sur la carte partielle donnée ci-après, l'extrémité nord du Tanganika présente une forme très régulière, à peu près rectangulaire; sur une distance de plus de 40 km, la largeur du lac ne s'écarte pas notablement de 22 km; la profondeur moyenne $\bar{h}(x)$ (définie par $S(x)/b(x)$, c'est-à-dire supposée constante le long de chacune des sections effectuées perpendiculairement aux côtés du rectangle) croît lentement jusqu'à 140 m environ sur une distance de 13 km, puis reste sensiblement constante sur plus de 15 km; au-delà de cette distance, son comportement devient capricieux.

Il semble donc qu'en linéarisant convenablement $\bar{h}(x)$, on pourrait assimiler les trois ou quatre premiers compartiments du lac à ceux d'un lac déjà étudié : le lac à fond plan incliné et de largeur constante, dans lequel on sait que des « shelf-seiches » à nœuds transversaux peuvent apparaître.

Avant de passer aux calculs numériques, voici une table de mesures. Les sections sont numérotées du nord au sud (voir carte).

Section n°	x km	$S(x)$ km ²	$b(x)$ km	$\bar{b}(x) = \Delta v / \Delta x$ km	Δv km ²	$\bar{h}(x)$ m	$\bar{H} = \frac{S(x)}{21,96 \text{ km}}$ m
1	1	0,835	20,6		20,6	41	38
2	5	2,420	22,6	21,6	86,4	108	110
3	9	2,910	23,6	23,1	92,4	123	133
4	13	2,910	21,2	22,4	89,6	137	133
5	17	2,905	21,2	21,2	84,8	137	132
6	21	2,825	20,6	20,9	83,6	137	129
7	25	3,055	22,0	21,3	85,2	139	139
8	29	3,125	21,2	21,6	86,4	147	142
9	33	3,995	20,8	21,0	84,0	192	182
10	37	4,755	23,2	22,0	88,0	205	217
11	41	5,425	24,6	23,9	95,6	221	247
12	45	5,500	26,0	25,3	101,2	212	—
13	49	5,550	27,2	26,6	106,4	204	—

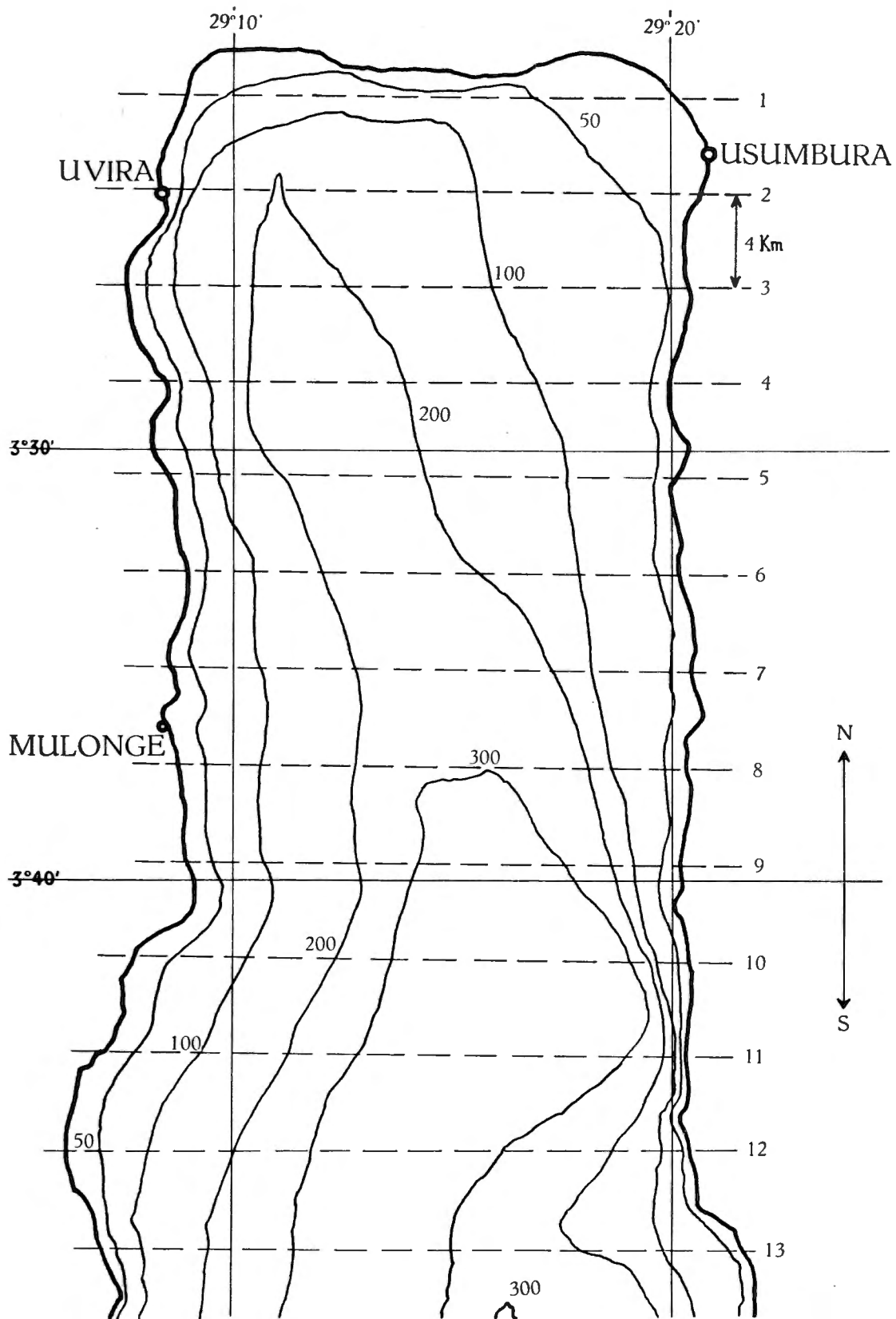


FIG. 70. — Lac Tanganika. Extrémité nord. Carte bathymétrique.

1-13 : Divisions utilisées pour le calcul des oscillations des types « shelf-seiches » de HIDAOKA et « edge-waves » de STOKES.

Remarques.

1. Comme le lac s'élargit notablement à partir de la onzième division, la largeur moyenne de 21,96 km, dont on s'est servi pour calculer $\bar{H}(x)$, a été prise sur les onze premières divisions seulement : c'est pourquoi \bar{H} n'a plus été repris aux nos 12 et 13.

2. La colonne $\bar{b} = \Delta v / \Delta x$ se rapporte aux largeurs moyennes de chaque compartiment : les nombres qui s'y trouvent sont les moyennes arithmétiques des $b(x)$ mesurés aux sections-frontière; c'est ce qui est suggéré par la disposition particulière des nombres de cette colonne.

Voici les résultats numériques :

A. — En traitant le problème selon la théorie des « shelf-seiches » (§ 1).

Bornons-nous à considérer les quatre seiches suivantes :

a) Un nœud transversal, pas de nœud longitudinal ($r = 1, j = 0$), c'est-à-dire

$$\zeta_{10} = \sin \frac{\pi y}{b_0} e^{-\alpha'}$$

valeur propre :

$$\lambda'_{10} = k = \frac{\pi}{b_0}$$

b) Un nœud transversal, un nœud longitudinal ($r = 1, j = 1$)

$$\zeta_{11} = \sin \frac{\pi y}{b_0} e^{-\alpha'} (1 - 2x')$$

valeur propre :

$$\lambda'_{11} = 3k = \frac{3\pi}{b_0}$$

c) Deux nœuds transversaux, pas de nœud longitudinal ($r = 2, j = 0$)

$$\zeta_{20} = \cos \frac{2\pi y}{b_0} \cdot e^{-\alpha'}$$

valeur propre :

$$\lambda'_{20} = k = \frac{2\pi}{b_0}$$

d) Deux nœuds transversaux, un nœud longitudinal ($r = 2, j = 1$)

$$\zeta_{21} = \cos \frac{2\pi y}{b_0} e^{-\alpha'} (1 - 2x')$$

valeur propre :

$$\lambda'_{21} = 3k = \frac{6\pi}{b_0}$$

Unité naturelle de longueur.

On a montré ci-dessus (§ 1) que l'unité naturelle de longueur x est égale à $1/k$: pour les seiches des deux premiers types, elle est donc de b_0/π et pour celles des deux derniers types, de $b_0/2\pi$.

L'ordre de grandeur de b_0 étant de 22 km, on vérifie aisément qu'à une distance de 14 km environ de la côte nord du lac, les seiches des deux premiers types voient leur amplitude réduite à moins d'un septième de ce qu'elle était sur cette côte même; pour les seiches des deux derniers types, il suffit d'une distance de 7 km pour réduire les amplitudes dans le même rapport. Ces considérations paraissent justifier l'approximation adoptée en assimilant l'extrémité nord du Tanganika à un lac à fond plan incliné de largeur constante.

Linéarisation de $\bar{h}(x)$.

Un premier essai a été fait par la méthode des moindres carrés, mais le résultat en est visiblement peu satisfaisant (cf. fig. 71) : on trouve à l'aide du polynôme $\bar{h}(x) = 26,43 \text{ m} + 9,89 \text{ m} \times 10^{-3} x$ la table suivante :

x km	$\bar{h}(x)$ (polynôme) m	$\bar{h}(x)$ (mesuré) m
0	26,43	0
1	36,32	41
5	75,88	108
9	115,44	123
13	155,00	137

L'usage de ce polynôme obligerait à déplacer fictivement la côte nord de 2,7 km environ vers le nord, de manière à pouvoir écrire :

$$\bar{h}(x') \equiv \beta x' = 9,89 \text{ m} \times 10^{-3} x' \quad (x' = x + 2,70).$$

Afin d'éviter ce « déplacement », il paraît préférable d'utiliser une droite $\bar{h}(x) = \beta x$ tracée empiriquement de manière à ce que les écarts soient faibles surtout au voisinage de la côte nord, région où l'amplitude de la seiche est la plus forte; à 8 ou 10 km de cette côte des écarts plus importants n'auront plus qu'un rôle réduit. A titre de comparaison, plusieurs valeurs de β seront utilisées et les résultats confrontés.

Soient quatre valeurs de β , respectivement égales à 12×10^{-3} , 14×10^{-3} , 16×10^{-3} , 18×10^{-3} (nombres purs); $\bar{h}(x)$ et x sont supposés être exprimés en mètres. Les courbes correspondantes sont données sur la figure 71 et distinguées par les chiffres romains I, II, III et IV respectivement.

Calcul des périodes des seiches.

Seiche du type *a*) : nœud transversal unique, pas de nœud longitudinal; on a immédiatement :

$$\lambda_{10} \equiv \frac{4\pi^2}{g^2 T^2} = \frac{\pi}{b_0},$$

d'où, en prenant $b_0 = 21,96 \text{ km}$ (cf. remarque 1 de la p. 278), $g = 978 \text{ cm sec}^{-2}$ (le lac Tanganika étant très voisin de l'équateur), et β étant pris successivement égal à 12×10^{-3} , 14×10^{-3} , 16×10^{-3} , 18×10^{-3} :

$$\begin{aligned} T_{10} \text{ (I)} &= 1.533,4 \text{ sec} \simeq 25,5 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (II)} &= 1.419,7 \text{ sec} \simeq 23,7 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (III)} &= 1.328 \text{ sec} \simeq 22,1 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (IV)} &= 1.252 \text{ sec} \simeq 20,9 \text{ min.} \end{aligned}$$

On trouvera plus loin un graphique montrant la décroissance exponentielle en x' de l'amplitude de cette première seiche, ainsi que des trois suivantes.

Seiche du type *b*) : nœud transversal unique, un nœud longitudinal.

On a $\lambda'_{11} = 3\pi/b_0$, d'où :

$$\begin{aligned} T_{11} \text{ (I)} &= 885,3 \text{ sec} \simeq 14,8 \text{ min;} \\ T_{11} \text{ (II)} &= 819,7 \text{ sec} \simeq 13,8 \text{ min;} \\ T_{11} \text{ (III)} &= 766,7 \text{ sec} \simeq 12,8 \text{ min;} \\ T_{11} \text{ (IV)} &= 722,8 \text{ sec} \simeq 12,0 \text{ min.} \end{aligned}$$

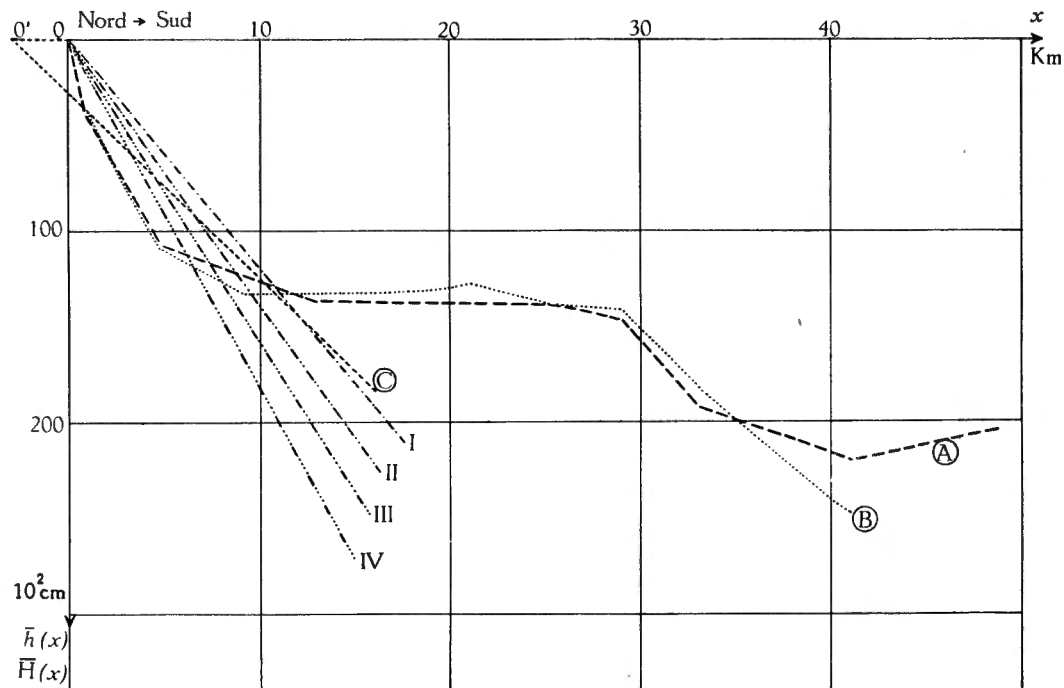


FIG. 71. — Lac Tanganyika. Extrémité nord.

Courbe **A** : profondeur moyenne $\bar{h}(x) = S(x)/b(x)$; courbe **B** : profondeur moyenne $\bar{H}(x) = S(x)/b_0$; courbe **C** : profondeur linéarisée par moindres carrés $h(x') = \beta x'$; courbes I-IV : essais divers de linéarisation empirique de $h(x)$ au voisinage de l'extrémité nord du lac.

On a bien

$$T_{10}/T_{11} = \sqrt{3} \quad (\text{en effet } \lambda'_{11}/\lambda'_{10} = 3).$$

Seiches du type *c*) : deux nœuds transversaux, pas de nœud longitudinal.

On a $\lambda'_{20} = 2\pi/b_0$, d'où :

$$\begin{aligned} T_{20} \text{ (I)} &= 1.084,3 \text{ sec} \simeq 18,0 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (II)} &= 1.003,9 \text{ sec} \simeq 16,7 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (III)} &= 939,0 \text{ sec} \simeq 15,7 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (IV)} &= 885,3 \text{ sec} \simeq 14,7 \text{ min} \end{aligned}$$

$$(T_{10}/T_{20} = \sqrt{2}, \text{ puisque } \lambda'_{20}/\lambda'_{10} = 2).$$

Seiches du type *d*) : deux nœuds transversaux, un nœud longitudinal.

On a $\lambda'_{21} = 6\pi/b_0$, d'où :

$$\begin{aligned} T_{21} \text{ (I)} &= 626,0 \text{ sec} \simeq 10,5 \text{ min;} \\ T_{21} \text{ (II)} &= 579,6 \text{ sec} \simeq 9,6 \text{ min;} \\ T_{21} \text{ (III)} &= 542,2 \text{ sec} \simeq 9,0 \text{ min;} \\ T_{21} \text{ (IV)} &= 511,1 \text{ sec} \simeq 8,5 \text{ min} \end{aligned}$$

$$(T_{10}/T_{21} = \sqrt{6}, \text{ puisque } \lambda'_{21}/\lambda'_{10} = 6).$$

On voit que la période varie notablement suivant la valeur de β que l'on adopte; par suite, la méthode ici employée permet de calculer une valeur seulement approximative des périodes d'oscillation transversales. Suivant le type de seiches considéré, la période moyenne est de 23 min (type *a*), 13,3 min (type *b*), 16,3 min (type *c*) et 9,4 min (type *d*); pour chacune de ces périodes, l'erreur peut atteindre 10 % en valeur absolue, et son signe est incertain.

Distribution longitudinale des amplitudes. Étude des fonctions $w(x')$.

Seiches du type *a*) : $w_{10} = e^{-x'}$.

Unité naturelle de longueur : $1/k$ (cf. p. 278), c'est-à-dire $21,96 \text{ km}/\pi \simeq 7 \text{ km}$. Il s'ensuit qu'à 10 km de la côte nord, l'amplitude de la seiche est réduite au quart de sa valeur au voisinage immédiat de cette côte; au-delà de $x \simeq 10 \text{ km}$, c'est-à-dire $\simeq 1,4$ unité naturelle de longueur, la fonction $\bar{h}(x)$ cesse d'être représentée de manière acceptable par βx (quel que soit la valeur de β parmi les quatre proposées), et par conséquent la discussion tombe à faux. Le profil a la forme bien connue de l'exponentielle amortie (cf. fig. 72).

Seiches du type *b*) : $w_{11} = e^{-x'}(1 - 2x')$.

Même unité naturelle de longueur, voisine de 7 km.

Le nœud longitudinal se situe en $x' = 1/2 \simeq 3,5 \text{ km}$ de la côte nord; sa position est indépendante de la pente du fond, cette dernière ne modifiant que la période d'oscillation et non le profil de la seiche.

La fonction w_{11} admet un extrémum en $x' = 3/2 = 1,5 \text{ U.L.} \simeq 10,5 \text{ km}$; à cet endroit $w_{11} = -2e^{-3/2} \simeq 0,44$, c'est-à-dire un peu moins de la moitié de sa valeur initiale.

Pour le profil, voir la figure 72.

Seiches du type *c*) : même profil longitudinal que celles du type *a*), mais l'unité naturelle de longueur n'étant que de $b_0/2\pi \simeq 3,5 \text{ km}$, la décroissance de l'exponentielle est beaucoup plus rapide que pour les seiches des types *a*) et *b*) : pour $x = 10 \text{ km}$, l'amplitude est réduite à moins de 6 % de sa valeur initiale (courbe w_{20}).

Seiches du type *d*) : même profil longitudinal que celles du type *b*), mais comme dans le type *c*), l'unité naturelle de longueur n'est plus que de 3,5 km; l'extrémum se situe ainsi vers 5,25 km, et pour $x = 10,5 \text{ km} = 3 \text{ U.L.}$, l'amplitude est inférieure à 25 % de sa valeur initiale (courbe w_{21}).

En conclusion, on voit donc que c'est surtout pour les seiches à deux nœuds transversaux que l'approximation adoptée pour le bassin nord du Tanganika paraît satisfaisante. Elle le serait évidemment encore davantage pour les seiches à trois nœuds transversaux, mais celles-ci, fortement concentrées le long de la côte, et de périodes très courtes, seront sans doute trop rapidement amorties pour être bien observables.

Voici pour terminer le graphique des fonctions $w(x')$ relatives aux quatre types de seiches étudiés; l'axe Ox' est gradué en unités naturelles de longueur et $w(x')$ est pris égal à un en $x' = 0$.

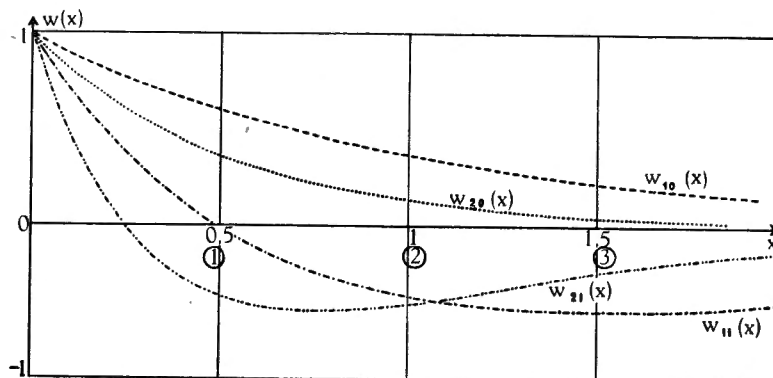


FIG. 72. — Lac Tanganika. Extrémité nord.
Distribution de l'amplitude $w_{r,j}(x')$ des « shelf-seiches »
(r = nombre de nœuds transversaux; j = nombre de nœuds longitudinaux).
N. B. — x doit être remplacé par x' sur cette figure.

B. — En traitant le problème suivant la théorie des « edge-waves » (§ 2).

Limitons-nous à nouveau aux seiches à un et à deux nœuds transversaux. On aura, en prenant à nouveau $b_0 = 21,96$ km : $\Lambda_1 = 43,92$ km, $\Lambda_2 = 21,96$ km.

Reprenons les quatre valeurs précédemment proposées pour la pente du fond plan incliné : $\text{tg } \beta = 12 \times 10^{-3}$, 14×10^{-3} , 16×10^{-3} et 18×10^{-3} (distinguées respectivement par les chiffres I, II, III et IV). L'écart entre le sin et la tg étant négligeable ici, on confondra ces deux fonctions pour l'argument β , et l'on retrouve ainsi les résultats obtenus en A, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} T_{10} \text{ (I)} &\simeq 25,5 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (II)} &\simeq 23,7 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (III)} &\simeq 22,1 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (IV)} &\simeq 20,9 \text{ min;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{20} \text{ (I)} &\simeq 18,0 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (II)} &\simeq 16,7 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (III)} &\simeq 15,7 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (IV)} &\simeq 14,7 \text{ min.} \end{aligned}$$

(On remarque que seules les seiches sans nœuds longitudinaux se retrouvent par les deux voies.)

§ 4. LES « BANK-SEICHES ».

K. HIDAOKA, dans un article déjà cité (cf. p. 266, note 106), pose la question de savoir si l'existence d'un rivage est absolument nécessaire pour que des seiches puissent apparaître dans une masse d'eau. Il répond par la négative, à savoir que la présence d'un haut-fond suffit, et traite sommairement, à une seule dimension horizontale, le cas particulier du haut-fond hyperbolique.

Avant de passer à l'exposé de cette théorie, remarquons que l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides, sur laquelle elle se fonde essentiellement (c'est un problème d'ondes de marée!), tombe certainement en défaut aux très grandes profondeurs, c'est-à-dire loin du sommet du haut-fond. Néanmoins, comme à ces endroits l'amplitude des dénivellations sera fortement réduite, la théorie de HIDAOKA conserve son intérêt pour les régions au voisinage de ce sommet, où l'hypothèse du parallélisme des tranches se vérifie le mieux. Ceci permet de comprendre la véritable nature des « bank-seiches » de HIDAOKA; elles constituent la modification, due à un haut-fond, de systèmes d'ondes stationnaires dans un milieu de profondeur croissante.

A. — Le haut-fond hyperbolique de K. HIDAOKA.

1. Supposons un océan sans limite, dont la profondeur soit donnée par

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}};$$

on a ainsi un haut-fond hyperbolique dont le sommet est situé à l'origine (la profondeur est mesurée positivement vers le bas) (cf. fig. 73).

On a alors, avec les notations habituelles, et le mouvement étant supposé stationnaire ($\lambda' = \omega^2/g h_0$) :

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\zeta}{dx} \right] + \lambda' \zeta = 0. \quad (\text{IX.18})$$

Changeons de variable : $x/a = z$, et posons avec HIDAOKA : $2\lambda'a^2 = \theta$. Il vient :

$$\frac{d}{dz} \left[\sqrt{1+z^2} \frac{d\zeta}{dz} \right] + \frac{1}{2} \theta \cdot \zeta = 0. \quad (\text{IX.18}')$$

Remarquons ici en passant que si z devient très grand devant 1, on retrouve le cas du fond plan incliné ⁽¹¹⁴⁾ (traité ci-dessus pp. 266 sqq.), et l'équation (IX.18') prend la forme de l'équation bien connue de BESSEL-FOURIER (IX.10'), dont la solution est $\zeta = J_0(\sqrt{2z\theta})$: il n'y a donc plus de périodes propres d'oscillation, alors que dans le cas du haut-fond hyperbolique, il existe des périodes propres, comme nous le verrons plus loin. Ceci rejoint les conclusions du § 1 (cf. p. 272).

Faisons ensuite $z = \sinh 2u$; on obtient :

$$\frac{d^2\zeta}{du^2} + 2\theta \cosh 2u \cdot \zeta = 0. \quad (\text{IX.19})$$

Comme condition-frontière, il est naturel d'exiger $\zeta(\pm \infty) = 0$, les solutions restant évidemment partout finies.

En s'inspirant de la théorie des équations de MATHIEU, dont on peut formellement déduire (IX.19), si l'on considère l'équation $y'' + (a - 2\theta \cos 2x)y = 0$, et qu'on fasse $x = iu$, $a = 0$, K. HIDAOKA est amené à envisager quatre classes de solutions pour (IX.19), qu'il désigne par $Ce_{2n}(u, \theta)$, $Se_{2n+1}(u, \theta)$, $Ce_{2n+1}(u, \theta)$, $Se_{2n+2}(u, \theta)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), et il ne reste plus qu'à calculer θ de manière que a puisse être nul ⁽¹¹⁵⁾.

⁽¹¹⁴⁾ On remarque que ce plan n'est autre que le plan asymptote du cylindre hyperbolique

$$y = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

⁽¹¹⁵⁾ Il est à remarquer que la parenté de ces fonctions avec les fonctions de MATHIEU désignées par des notations analogues est purement formelle, tout comme celle qui existe entre les fonctions sin, cos, etc., et sinh, cosh, etc., par exemple.

C'est l'équation aux valeurs propres des solutions de la première classe, dont la plus basse racine, θ_0 , est voisine de 21,3. La période correspondante est égale à $1,925 a/\sqrt{gh_0}$.

On attribue ensuite arbitrairement une valeur non nulle à A_0 , et on calcule les autres coefficients à l'aide des relations de récurrence.

Deuxième classe. — Solutions $Se_{2n+1}(u, \theta)$.

Développons les en série de sinh : $Se_{2n+1}(u, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}(\theta) \cdot \sinh(2r+1)u$.

On trouve, comme pour la 1^{re} classe, une série de relations de récurrence qui conduit à l'équation aux valeurs propres écrite, sous forme de fraction continue :

$$\theta - 1 + \frac{\theta^2}{3^2} - \frac{\theta^2}{5^2} + \frac{\theta^2}{7^2} - \dots = 0. \quad (\text{IX.21})$$

La plus basse racine en est voisine de 0,91 (HIDAKA donne un résultat très précis : $\theta_1 = 0,9080463\dots$); la période correspondante (c'est le fondamental) est donnée par $T_1 = 9,325 a/\sqrt{gh_0}$.

Néanmoins la valeur $\theta = 0$ est aussi possible; il suffit de l'introduire dans les relations de récurrence en B pour voir qu'elle entraîne l'annulation de tous les coefficients : c'est à nouveau l'état de repos.

Troisième classe. — Solutions $Ce_{2n+1}(u, \theta)$, qu'on peut développer en série de cosh : $Ce_{2n+1}(u, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+1}(\theta) \cdot \cosh(2r+1)u$.

On trouve, toujours de la même manière, l'équation aux valeurs propres :

$$-\theta - 1 + \frac{\theta^2}{3^2} - \frac{\theta^2}{5^2} + \frac{\theta^2}{7^2} - \dots = 0, \quad (\text{IX.22})$$

dont la plus basse racine a pour valeur 7,514...; la période correspondante est $T = 3,24 a/\sqrt{gh_0}$. En outre, comme pour la 2^e classe, $\theta = 0$ reste possible : tous les C s'annulent à nouveau (état de repos !).

Quatrième classe (HIDAKA en signale simplement l'existence, mais ne donne aucun calcul). — Solutions : $Se_{2n+2}(u, \theta)$ ou, sous forme de série de sinh :

$$Se_{2n+2}(u, \theta) + \sum_{r=0}^{\infty} D_{2r+2}(\theta) \cdot \sinh(2r+2)u.$$

L'équation aux valeurs propres est :

$$2^2 - \frac{\theta^2}{4^2} - \frac{\theta^2}{6^2} - \frac{\theta^2}{8^2} - \dots = 0, \quad (\text{IX.23})$$

dont la racine la plus basse est voisine de 7,587 ⁽¹¹⁷⁾; on en tire $T = 3,225 a/\sqrt{gh_0}$. Ici

⁽¹¹⁷⁾ Il est curieux de constater combien les racines les plus basses des équations (IX.22) et (IX.23) sont extraordinairement voisines : l'écart est inférieur à 1 %. On vérifie toutefois qu'elles sont bien distinctes.

encore $\theta = 0$ est possible : tous les D s'annulent (état de repos). On voit donc que l'état de repos ($\theta = 0$, $\zeta = 0$ partout) n'appartient en propre à aucune classe de solutions, contrairement à ce qu'affirme HIDAOKA, qui le rattache aux solutions du type $Ce_{2n}(u, \theta)$ (série de cosh d'argument « pair »).

Une comparaison s'impose encore entre les résultats qui viennent d'être donnés et la formule de Merian : $T_n = 2l/k\sqrt{gh_0}$, applicable au bassin de profondeur uniforme h_0 et de longueur l . HIDAOKA remarque que pour $l \rightarrow \infty$, les T_n (profondeur constante) deviennent tous infinis, alors que, dans son cas de « bank-seiches », seul le « fondamental » (si l'on peut appeler ainsi l'état de repos) est infini, toutes les autres périodes étant finies (malgré l'étendue infinie de son océan) — conclusion qui lui paraît paradoxale (« very queer but nevertheless true »). Pour faire le raccord entre les deux cas, il nous semble qu'il suffit d'observer que les périodes de « bank-seiches » de HIDAOKA sont proportionnelles à a , quantité dont l'inverse du carré mesure la pente du haut-fond :

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{h_0 x}{a^2} \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2};$$

si cette pente devient nulle, c'est-à-dire si a devient infini, on retrouve un océan de profondeur constante, $= h_0$, de longueur infinie, et dont tous les modes d'oscillation ont bien une période infinie (pour autant que cette manière d'envisager les choses ait encore un sens !), puisque proportionnelle à a .

2. A la suite de son article sur les « bank-seiches » (cas du haut-fond hyperbolique qui vient d'être traité), K. HIDAOKA envisage un cas particulier assez imprévu : celui d'un « haut-fond » hyperbolique au sommet duquel se trouve construit un petit mur vertical, jouant le rôle d'une côte (cf. fig. 74).

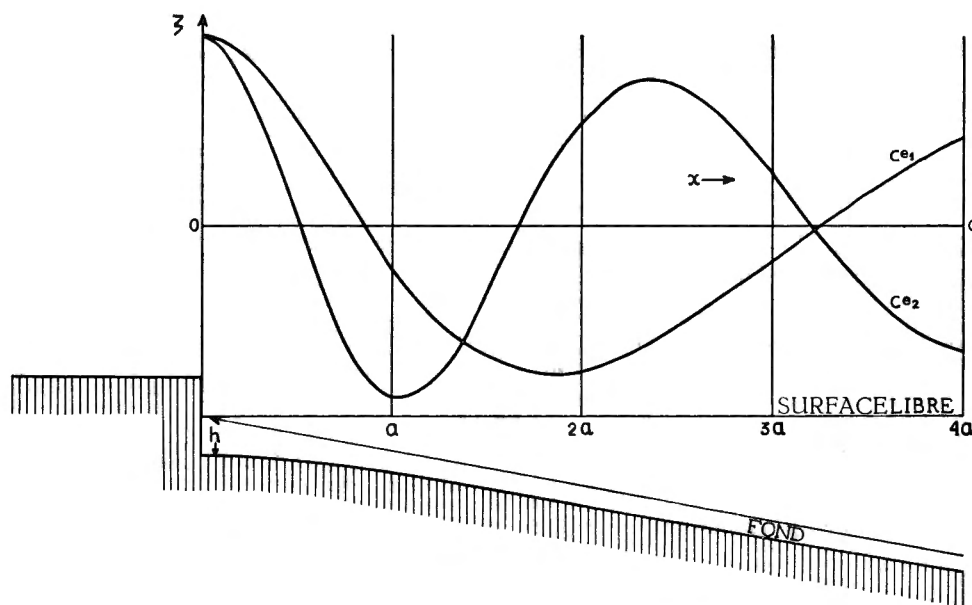


FIG. 74. — « Haut-fond » hyperbolique, au sommet duquel se trouve un mur vertical formant côte, et profils de quelques types de seiches pouvant y apparaître.

(D'après K. HIDAOKA, même article.)

h_0 est ainsi la profondeur immédiatement devant cette côte et a est la distance de cette dernière à l'isobathe $h_0 \sqrt{2}$.

L'équation à résoudre est la même que ci-dessus (IX.18) mais avec la condition-frontière supplémentaire $\zeta'(0) = 0$: le mouvement de l'eau perpendiculairement au rivage est nul (ventre à l'origine). Il s'ensuit que seules les solutions des classes I et III (séries en cosh) seront recevables.

Il faut souligner ici que, contrairement à ce qui a lieu pour un rivage plan incliné, pour lequel il n'y a pas de périodes propres d'oscillation (cf. p. 272), le « haut-fond » hyperbolique avec mur se comporte, en ce qui concerne les périodes propres, comme un haut-fond hyperbolique sans mur : il empêche l'existence d'ondes stationnaires de période quelconque; c'est seulement lorsque a devient très petit, c'est-à-dire lorsque la branche d'hyperbole tend à se confondre à l'origine avec son asymptote, que des ondes stationnaires de période quelconque deviennent possibles; en effet, on retrouve alors le cas du rivage plan incliné.

B. — On peut traiter d'une manière analogue un autre cas simple : celui du haut-fond parabolique : $h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)$ (cf. fig. 75).

1. Pour le problème à une dimension horizontale (océan de largeur infinie), l'équation en ζ s'écrit ($\lambda' = \omega^2 / gh_0$) :

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{d\zeta}{dx} \right] + \lambda' \zeta = 0. \quad (\text{IX.24})$$

Posons $x/a = z$, multiplions (IX.24) par $(1 + z^2)$ et changeons de variable en posant $(1 + z^2) \frac{d}{dz} = \frac{d}{dv}$, c'est-à-dire $v = \int \frac{dz}{1 + z^2}$ ou $z = \operatorname{tg} v$.

Le champ de la nouvelle variable est ainsi $-\pi/2 \leq v \leq +\pi/2$ (celui de z était $-\infty \leq z \leq +\infty$).

L'équation (IX.24) devient

$$\frac{d^2 \zeta}{dv^2} + \lambda' a^2 \cdot \sec^2 v \cdot \zeta = 0. \quad (\text{IX.25})$$

Comme conditions-frontière, on prendra à nouveau $\zeta(\pm \infty) = 0$ (variable indépendante z) ou $\zeta(\pm \pi/2) = 0$ (variable indépendante v). L'équation (IX.25) elle-même le suggère : pour $|v| \rightarrow \pi/2$, $\sec^2 v \rightarrow \infty$; il faut donc $\zeta(\pm \pi/2) = 0$. De là l'idée d'essayer comme solutions des séries en $\cos(2r+1)v$ et en $\sin(2r+2)v$ ($r = 0, 1, 2, \dots$), dont tous les termes s'annuleront pour $v = \pm \pi/2$, et, accessoirement, des séries en $\cos 2rv$ et en $\sin(2r+1)v$, dont la dérivée première s'annule pour $v = \pm \pi/2$. Considérons donc des solutions des quatre classes suivantes :

$$a) \quad \zeta = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}(\theta) \cdot \cos 2rv;$$

$$b) \quad \zeta = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}(\theta) \cdot \sin(2r+1)v;$$

$$c) \quad \zeta = \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+1}(\theta) \cdot \cos(2r+1)v;$$

$$d) \quad \zeta = \sum_{r=0}^{\infty} D_{2r+2}(\theta) \cdot \sin(2r+2)v.$$

En itérant, on trouve l'équation aux valeurs propres (pour laquelle la 1^{re} relation de récurrence n'est pas utilisée) :

$$\mu - 2.2^2 - \frac{2^2.4^2}{\mu - 2.4^2} - \frac{4^2.6^2}{\mu - 2.6^2} - \frac{6^2.8^2}{\mu - 2.8^2} \dots = 0. \quad (\text{IX.26})$$

La plus basse racine est voisine de 3,39.

Cette équation n'admet pas de racine nulle, mais, à cause de la première relation de récurrence, il est néanmoins possible de prendre $\mu = 0$; tous les A s'annulent alors nécessairement (sauf A_0 qui est quelconque, mais peut évidemment être nul); ζ est ainsi nul (ou constant) : c'est l'état de repos, qu'on peut, à la rigueur, considérer avec HIDAOKA comme une sorte de mode « pré-fondamental » ($T = \infty$).

b) Deuxième classe. — En procédant comme ci-dessus, on obtient l'équation :

$$\mu - 1^2 - \frac{1^2.3^2}{\mu - 2.3^2} - \frac{3^2.5^2}{\mu - 2.5^2} - \frac{5^2.7^2}{\mu - 2.7^2} \dots = 0. \quad (\text{IX.27})$$

La racine la plus basse de cette équation (arrêtée à la 6^e réduite) est voisine de 0,129; mais la convergence de la fraction étant plutôt lente, il n'est pas sûr que la seconde décimale soit exacte.

Enfin, $\mu = 0$ ne suffit pas à annuler tous les coefficients B, et (IX.27) n'admet pas de racine nulle; l'état de repos n'appartient donc pas à cette classe de solutions.

c) Troisième classe. — $\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+1} \cos(2r+1)v$.

Équation aux valeurs propres :

$$\mu - 3 - \frac{1^2.3^2}{\mu - 2.3^2} - \frac{3^2.5^2}{\mu - 2.5^2} - \frac{5^2.7^2}{\mu - 2.7^2} \dots = 0. \quad (\text{IX.28})$$

La racine la plus basse en est $\mu_0 = 1,86$ environ (fraction arrêtée à la 6^e réduite; même remarque qu'au cas précédent : convergence lente). Ici encore $\mu = 0$ ne suffit pas à annuler tous les C, et (IX.28) n'admet pas de racine nulle : l'état de repos n'appartient donc pas non plus à la classe III.

d) Quatrième classe. — $\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} D_{2r+2} \sin(2r+2)v$.

Équation aux valeurs propres :

$$\mu - 2.2^2 - \frac{2^2.4^2}{\mu - 2.4^2} - \frac{4^2.6^2}{\mu - 2.6^2} - \frac{6^2.8^2}{\mu - 2.8^2} \dots = 0. \quad (\text{IX.29})$$

La plus basse racine est voisine de 3,39 (fraction arrêtée à la 6^e réduite, mais convergence lente !). Comme dans les deux cas précédents, $\mu = 0$ n'entraîne pas la nullité de tous les D, de sorte que l'état de repos n'appartient pas à la classe IV.

Il est à remarquer que cette dernière équation (IX.29) est identique à l'équation (IX.26). Les solutions des classes I et IV auront donc des coefficients égaux à partir de l'indice 2; en effet D_{2r} n'existe pas pour $r = 0$ et A_0 se calcule séparément à l'aide de la première relation de récurrence, non utilisée dans l'établissement de l'équation (IX.26).

Les valeurs propres seront égales; il s'ensuit qu'à une même période d'oscillation pourront correspondre deux types de profils : l'un (série de sinus) présentera certainement un nœud à l'origine ($\zeta = 0$, tous les sinus s'y annulant); de l'autre (série de cosinus) on ne pourra rien affirmer a priori quand à l'existence d'un nœud ou d'un ventre à l'origine : tous les cosinus y seront égaux à $+1$, de sorte que la valeur de ζ dépendra uniquement de celle des coefficients A_{2r} .

Les solutions trouvées en complétant les calculs de HIDAOKA ne présentent rien de semblable; aux séries $\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cosh 2ru$ et $\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} D_{2r+2} \sinh (2r+2)u$ correspond, il est vrai, la même relation de récurrence générale, mais les relations de récurrence initiales sont différentes, et de ce fait les équations aux valeurs propres sont aussi différentes; il est d'ailleurs aisé de se rendre compte que l'équation (IX.20) et l'équation (IX.23) ne sauraient avoir de racines communes, puisque le premier membre de (IX.20) figure comme dénominateur dans (IX.23).

Pour terminer, on peut dresser un petit tableau groupant les résultats numériques relatifs aux deux types de haut-fond étudiés. Les périodes sont exprimées en unités $a/\sqrt{gh_0}$.

Classe	Haut-fond hyperbolique		Haut-fond parabolique	
	Valeur propre la plus basse	Période	Valeur propre la plus basse	Période
I	$\theta \simeq 21,3$	1,925	$\mu = 3,39$ (zéro possible)	6,825 (∞)
II	$\theta \simeq 0,908$	9,325	$\mu = 0,129$	34,98
III	$\theta \simeq 7,514$	3,241	$\mu = 1,86$	9,214
IV	$\theta \simeq 7,587$	3,226	$\mu = 3,39$	6,825

Les périodes des seiches dues au haut-fond parabolique sont donc de deux à quatre fois plus longues que celles des seiches dues au haut-fond hyperbolique, ce qui est à première vue paradoxal, puisque la profondeur de l'océan est plus grande dans le premier cas que dans le second.

Le paradoxe disparaît si l'on observe que la formule de MERIAN (pour bassins fermés !) $T \sim h^{-1/2}$ ne vaut que pour une profondeur petite devant la longueur d'onde de la seiche, et assez peu variable pour qu'on puisse négliger h' devant h . En comparant les profils des deux fonds, on voit que la zone où la formule est applicable est beaucoup moins étendue dans le cas du haut-fond parabolique que dans celui du haut-fond hyperbolique; la profondeur « efficace » moyenne sera donc bien moindre dans le premier cas que dans le second. Notamment, si a est très grand, la pente du haut-fond hyperbolique, $h_{\text{HYP}} = \frac{h_0 x}{a^2} \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2}$ pourra être très faible (pratiquement constante à partir de x suffisamment grand, de l'ordre de a^2), alors que celle du haut-fond parabolique croît indéfiniment avec x ($h'_{\text{PAR}} = 2h_0 x/a$).

Les rapports des périodes n'ont alors plus rien de surprenant.

Orthogonalité des fonctions propres.

L'équation (IX.25), étant manifestement « auto-adjointe », peut se transformer en une équation intégrale à noyau symétrique; il en résulte que toutes les fonctions propres des 4 classes sont orthogonales entre elles ⁽¹¹⁸⁾, c'est-à-dire que si l'on désigne par $\mathcal{C}e_m(\mu, \nu)$ les solutions des classes I et III (séries de cos) et par $\mathcal{S}e_m(\mu, \nu)$ les solutions des classes II et IV (séries de sin), on a (fonctions normées !):

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{C}e_m \mathcal{C}e_n \, d\nu = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{S}e_m \mathcal{S}e_n \, d\nu = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases};$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{C}e_m \mathcal{S}e_n \, d\nu = 0, \quad (m = n \quad \text{ou} \quad m \neq n \text{ indifféremment.})$$

2. Le problème à deux dimensions horizontales.

Soit un canal de largeur finie, constante, égale à b_0 , et dont la profondeur est donnée, comme au 1., par

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right);$$

le canal s'étend évidemment à l'infini dans les deux sens.

L'équation à résoudre est maintenant :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \lambda' \zeta = 0 \quad (\text{IX.30})$$

avec les conditions-frontière

$$\zeta = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm \infty, \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{y=\pm b_0/2} = 0.$$

Posons comme précédemment :

$$\zeta = \cos \frac{p\pi y}{b_0} \cdot w(x) \quad \text{ou} \quad \zeta = \sin \frac{q\pi y}{b_0} \cdot w(x)$$

($p =$ entier pair, $q =$ entier impair, désignant le nombre de nœuds transversaux); posons encore :

$$\left(\frac{p\pi}{b_0} \right)^2 = k^2 \quad \left(\text{ou} \quad \left(\frac{q\pi}{b_0} \right)^2 = k^2 \right); \quad \frac{x}{a} = z; \quad \lambda' a^2 = \mu; \quad k^2 a^2 = \theta^2;$$

(μ et θ^2 : nombres purs);

L'équation (IX.30) devient :

$$\frac{d}{dz} \left[(1+z^2) \frac{dw}{dz} \right] + [\mu - \theta^2 (1+z^2)] w = 0, \quad (\text{IX.30}')$$

avec la condition-frontière $w(\pm \infty) = 0$ ⁽¹¹⁹⁾; ou, en divisant par $(1+z^2)$:

$$w'' + \frac{2z}{1+z^2} w' + \left(\frac{\mu}{1+z^2} - \theta^2 \right) w = 0. \quad (\text{IX.31})$$

⁽¹¹⁸⁾ Cf. WHITTAKER, E. and WATSON, G., *Modern Analysis*, 11.61 (p. 225).

⁽¹¹⁹⁾ On remarquera que la variable z n'a pas de dimensions; l'unité de longueur pour x (dimension : L) est ainsi a , distance qui sépare le sommet du haut-fond (de profondeur h_0) du point de profondeur double.

Mise sous cette forme, l'équation montre immédiatement que pour $z \rightarrow \pm \infty$, la fonction w se comporte comme $e^{-\theta^2 z}$, ce qui assure la réalisation de la condition-frontière.

C'est pourquoi on traitera directement l'équation (IX.32) à l'aide de deux séries potentielles, l'une paire : $w(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} z^{2r}$, l'autre impaire : $w(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r+1} z^{2r+1}$, sans plus s'occuper de la réalisation de la condition-frontière.

a) Posons donc $w(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} z^{2r}$, on obtient l'équation aux valeurs propres :

$$\mu - \theta^2 + \frac{1.2 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 2.3} + \frac{3.4 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 4.5} + \frac{5.6 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 6.7} + \dots = 0, \quad (\text{IX.32})$$

et l'on vérifie facilement que le rayon de convergence de la série est infini.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation-fraction continue; pour cela, il faut se choisir un ordre de grandeur pour θ^2 , c'est-à-dire se donner r (nombre de nœuds transversaux) et b_0 (largeur du canal, tout naturellement mesurée en unités a , cf. note 119). A titre d'exemple, prenons $\theta^2 = 1$, avec $r = 1$ et $b_0 = \pi a$: on a bien alors $\theta^2 \equiv r^2 \pi^2 a^2 / b_0^2$; si θ^2 devient très grand, l'équation (IX.32) n'admettra que des racines < 0 , irrecevables. Avec $\theta^2 = 1$, la plus basse racine est $\mu = 0,6810$ (fraction arrêtée à la 6^e réduite), c'est-à-dire :

$$T = \frac{7,614 a}{\sqrt{gh_0}}.$$

b) Prenons ensuite $w(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r+1} z^{2r+1}$. On trouve de même :

$$(\mu - \theta^2) + 1.2 + \frac{2.3 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 3.4} + \frac{4.5 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 5.6} + \frac{6.7 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 7.8} + \dots = 0. \quad (\text{IX.33})$$

Reprenons la valeur adoptée pour θ^2 au premier cas : $\theta^2 = 1$. On voit qu'il n'existe pas de racine positive μ . Si l'on veut retrouver une racine positive μ , il faudra prendre θ^2 plus grand, ce qu'on peut faire soit en réduisant la largeur du lac b_0 (mesurée en unités a), soit en considérant une seiche latérale à plusieurs nœuds, c'est-à-dire (dans un cas comme dans l'autre) en diminuant la longueur d'onde des oscillations transversales. Prenons encore $\theta^2 = 4$ (largeur divisée par 2, ou bien largeur inchangée et seiche binodale) : il n'y aura pas davantage de racine positive μ .

Si l'on prend $\theta^2 = 5$ (c'est-à-dire largeur divisée par $\sqrt{5}$), on trouve comme plus petite racine positive : $\mu = 0,177$ (fraction arrêtée à la 6^e réduite), c'est-à-dire

$$T = \frac{14,935 a}{\sqrt{gh_0}}.$$

A titre de comparaison, calculons, pour la même valeur de θ^2 , la plus basse racine de l'équation (IX.32); on trouve, en arrêtant également la fraction à la 6^e réduite, $\mu = 3,620$, d'où

$$T = \frac{3,302 a}{\sqrt{gh_0}}.$$

Le rapport des deux périodes,

$$\frac{14,935}{3,302} \simeq 4,523$$

est supérieur à celui des deux plus longues périodes trouvées par K. HIDAOKA pour le haut-fond hyperbolique (cf. p. 290) :

$$\frac{9,325}{3,241} \simeq 2,877,$$

et à celui des deux plus longues périodes trouvées ci-dessus pour le haut-fond parabolique :

$$\frac{34,98}{9,214} \simeq 3,796.$$

§ 5. LES SEICHES DE DÉTROITS.

La possibilité de seiches dans un détroit constitué par deux caps rectangulaires de même « largeur » (fig. 76) fut envisagée pour la première fois vers 1901 par R. A. HARRIS ⁽¹²⁰⁾. Considérons d'abord le cas du bassin rectangulaire entièrement fermé. On sait (cf. chap. I) que son oscillation aura une période telle que si l'on considère une onde progressant parallèlement à un des côtés, sa vitesse de propagation sera \sqrt{gh} ; si cette onde progressive se propage, après réflexion, en sens inverse, et se superpose à l'onde incidente, on obtiendra, moyennant une longueur convenable du bassin ($= k\Lambda/2$, Λ étant la longueur d'onde de l'oscillation et k un entier positif quelconque), un système d'ondes stationnaires.

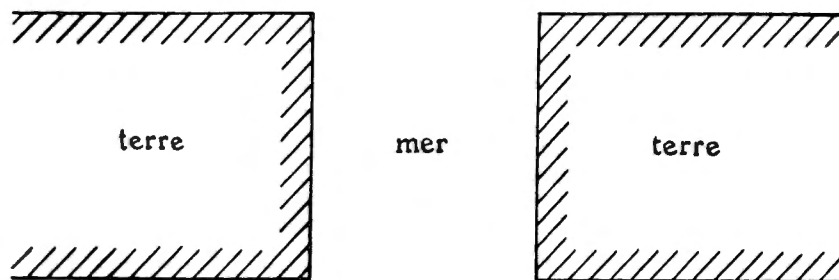


FIG. 76.

L'expérience montre que si l'on supprime les deux parois latérales, il y aura encore une oscillation propre de même période, la partie agitée s'étendant un peu au-dehors, à la condition toutefois que les murs terminaux aient une largeur au moins égale à $\Lambda/4$.

K. HIDAOKA ⁽¹²¹⁾ a repris la question d'un point de vue théorique; il montre la

⁽¹²⁰⁾ HARRIS, R. A., *Manual of Tides*, cité par POINCARÉ, H., *Leçons de Mécanique Céleste*, III, p. 348 (chap. XIV, Théorie des Marées).

⁽¹²¹⁾ HIDAOKA, K., *Seiches in a Channel*, Mem. Imp. Mar. Obs., Kobe, V, 4 (1935), pp. 327-358.

possibilité d'apparition de seiches dans un détroit, dont les deux côtes opposées sont constituées par les deux branches d'une hyperbole, et calcule quelques valeurs propres; l'application de cette théorie au cas du détroit d'Akasi (au sud-ouest de Kobé, Japon), de forme approximativement hyperbolique, fournit cependant un résultat décevant : période fondamentale calculée : 5 min 30 sec, alors que la période fondamentale observée dépasse un peu les dix minutes.

L'équation en ζ à deux dimensions, à profondeur constante h_0 :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{h_0} \zeta = 0,$$

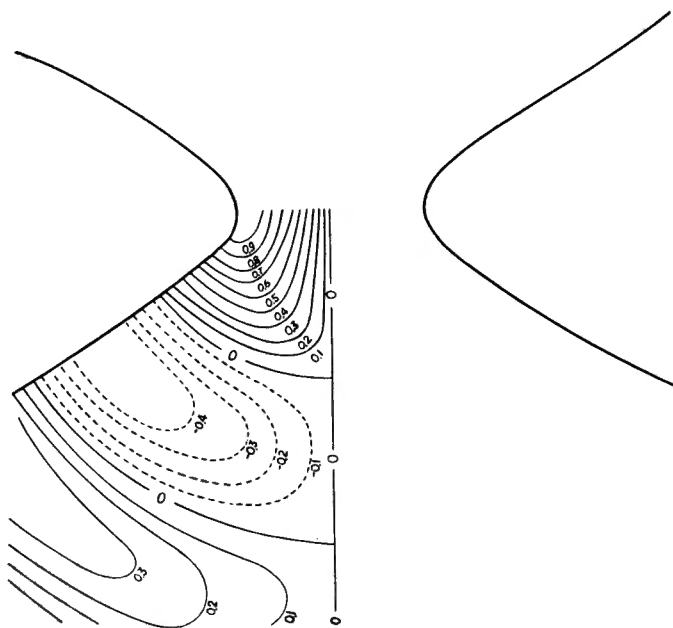


FIG. 77. — Détroit hyperbolique ($\nu_0 = 30^\circ$).

Distribution des amplitudes de la seiche $\zeta = ce_1(\nu, \theta) Ce_1(\mu, \theta)$.

[D'après K. HIDAOKA, Mem. Imper. Mar. Obs., V, 4 (1935), pp. 327 sqq.]

devient, en coordonnées elliptiques définies par $x = a \cosh \mu \cos \nu$, $y = a \sinh \mu \sin \nu$ (les champs des variables μ, ν étant $0 \leq \mu \leq \infty$, $-\pi \leq \nu \leq +\pi$) :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \nu^2} + 2\theta (\cosh 2\mu - \cos 2\nu) \zeta = 0, \quad (\text{IX.34})$$

où l'on a posé

$$\frac{\lambda a^2}{4 h_0} = \theta.$$

La condition-frontière $\partial \zeta / \partial n = 0$ sur les côtes ($n =$ normale extérieure) devient (l'équation de l'hyperbole étant $\nu = \nu_0$, la distance entre les deux foyers étant donnée par $2a$) :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \right)_{\nu=\nu_0} = 0. \quad (\text{IX.35})$$

L'équation (IX.34) admet les solutions particulières

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= A_r ce_r(\nu, \theta) Ce_r(\mu, \theta), \\ \zeta &= B_r se_r(\nu, \theta) Se_r(\mu, \theta), \end{aligned} \right\} r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IX.36})$$

où les A_r et B_r sont des constantes et $Ce_r(\mu, \theta)$ et $Se_r(\mu, \theta)$ des fonctions que K. HIDAOKA appelle les fonctions « associées » ou « modifiées » de MATHIEU; en réalité ce sont des fonctions de MATHIEU à argument imaginaire :

$$Ce_r(\mu, \theta) = ce_r(i\mu, \theta); \quad Se_r(\mu, \theta) = se_r(i\mu, \theta).$$

Elles sont quasi périodiques et d'amplitude décroissante (cf. pp. 283 sqq.). Introduisant (IX.36) dans (IX.35), on obtient

$$ce'_r(\nu_0, \theta) = 0, \quad se'_r(\nu_0, \theta) = 0,$$

les dérivations étant faites par rapport à ν .

Ce sont les équations aux valeurs propres θ du problème. Elles se résolvent par tables.

L'auteur envisage trois cas principaux : $\nu_0 = 30^\circ$, $\nu_0 = 45^\circ$ et $\nu_0 = 60^\circ$. La figure ci-contre donne l'allure de la solution $Ce_1(\nu, \theta) Ce_1(\mu, \theta)$ pour $\nu = 30^\circ$. L'amplitude a été calculée en prenant arbitrairement $\zeta = 1$ en $\mu = 0$, $\nu = \nu_0$. Elle est maximum dans la partie centrale du détroit, et décroît lentement à mesure qu'on s'éloigne de celle-ci.

A mesure que la largeur du détroit croît en direction de l'océan (c'est-à-dire à mesure que ν_0 décroît), λ décroît et par suite la période croît. Les deux autres cas conduisent à des conclusions analogues.

CONCLUSIONS

Après un long mais indispensable exposé de la théorie générale des seiches longitudinales, telle qu'elle a été élaborée depuis G. CHRYSTAL (1904), et après une étude détaillée des différentes méthodes de solution approchée préconisées par d'autres auteurs, nous avons pu aborder le calcul proprement dit des seiches longitudinales du lac Tanganika.

L'hypothèse du parallélisme des tranches liquides, essentielle à toute la théorie des oscillations longitudinales, exigeait une « rectification » du contour du lac, consistant à négliger les petites baies latérales ainsi que certaines parties peu profondes du lac au voisinage des côtes. Ces zones d'eaux-mortes ont pour effet de freiner le mouvement oscillatoire du lac et, par suite, d'allonger sa période; un lac « rogné » aura donc des périodes d'oscillation plus courtes que les périodes correspondantes du même lac non « rogné ». Une fois cette rectification opérée, nous avons calculé, par la méthode de DEFANT (la plus pratique de toutes pour les opérations numériques, notamment si l'on exécute celles-ci à la machine), les trois premiers modes globaux du Tanganika, et nous avons trouvé comme trois premières périodes (en chiffres ronds) : 4 h. 16 min., 2 h. 18 min., 1 h. 47 min. A titre de contre-épreuve, nous avons calculé ces mêmes modes pour un lac Tanganika non rectifié : les écarts sur les périodes varient de 2 % (pour le fondamental) à 4 % (troisième mode), ce qui montre l'effet appréciable d'une « rectification » du contour (en l'occurrence, la surface rognée atteignait près de 4 % de la surface totale du lac).

L'application de la méthode variationnelle de RITZ ne fournit de résultat acceptable que pour le fondamental; les écarts atteignent 10 à 15 % pour les deux modes supérieurs, en dépit d'un choix judicieux des fonctions d'essai.

En dépit de sa simplicité, la formule de DU BOYS a donné, pour le fondamental, un résultat étonnamment proche de celui trouvé par la méthode de DEFANT. Il en est de même pour une autre méthode examinée dans ce travail (elle consiste à transformer l'équation de CHRYSTAL en une équation intégrale de FREDHOLM), encore que ce dernier succès nous paraisse plutôt fortuit, ainsi qu'il a été expliqué page 143.

La méthode de NEUMANN a permis de répondre à la question de savoir si le Tanganika peut vraiment osciller comme une seule masse d'eau, et si une onde progressive de pression a des chances de traverser les étranglements de Rumonge

et de Lubaya-Lubugwe sans réflexion : il faut s'attendre à ce que les réflexions soient très faibles, et si des seiches partielles ne sont pas exclues, les seiches globales seront probablement importantes.

La distribution des nœuds et des ventres des trois modes calculés se trouve illustrée sur les graphiques. Ceux-ci pourront vraisemblablement servir à guider le placement des limnographes enregistreurs sur le pourtour du lac. A ce propos, il faut souligner la nécessité de placer des appareils à la fois sur la côte ouest et sur la côte est du lac, et de veiller à ce que toutes les observations soient soigneusement synchronisées. En effet, seiches longitudinales et seiches transversales ne manqueront pas de se superposer, de sorte que sans ces quelques précautions expérimentales, on risquerait de se trouver devant des enregistrements indéchiffrables.

A cause de la nouveauté du sujet, la mise au point d'une théorie des seiches transversales a constitué la partie la plus laborieuse de ce travail. Après avoir établi les conditions d'apparition de ces seiches, nous avons pu traiter un certain nombre de cas simples, admettant des solutions exactes. Le point de vue fondamental de cette théorie consiste simplement à tenir compte de la forme de la section droite dans le calcul des seiches longitudinales d'un canal, forme dont la théorie de CHRYSTAL néglige complètement le rôle. Dès qu'on la fait intervenir, on passe d'un problème à une dimension horizontale à un problème à deux dimensions horizontales. Moyennant quelques hypothèses simplificatrices, on arrive alors à séparer les deux variables horizontales et à écrire pour ζ une équation du type de STURM-LIOUVILLE, dont la discussion conduit à la conclusion que les seiches transversales ne peuvent apparaître que dans les parties « renflées » du lac, et que leur amplitude doit décroître exponentiellement de part et d'autre de ces régions.

Nous avons ensuite proposé deux méthodes numériques, permettant en principe l'étude des seiches transversales dans un lac quelconque (étant entendu que ses rives satisfont aux conditions de « faible courbure » comprises dans les hypothèses simplificatrices auxquelles il est fait allusion ci-dessus).

Diverses applications numériques, d'abord aux cas admettant des solutions exactes, ensuite au lac de Genève (pour lequel on possède des données expérimentales suffisantes) montrent la stabilité et la précision de ces deux méthodes. Appliquées au lac Tanganika, elles montrent que des seiches transversales uninodales seront observables dans les « bassins » de Rumonge, Albertville, Moba et Kala, avec des périodes fondamentales respectives (en chiffres ronds) de 18 min., 32 min., 31 min. et 27 min.

Il s'agit dans les quatre cas de seiches sans nœuds longitudinaux; pour les bassins de Nyanza et de Kala, on a encore trouvé deux seiches à un nœud longitudinal, l'une uninodale et l'autre binodale (transversalement); leurs périodes sont un peu plus basses que celles des seiches sans nœud longitudinal. Comme toutefois le calcul de ce type de seiches a donné, dans le cas du lac de Genève, des résultats moins encourageants, du moins à première vue (bien qu'à l'heure

actuelle la question ne soit pas encore bien débrouillée au point de vue des observations), il nous a paru plus prudent de nous en tenir surtout aux transversales sans nœuds longitudinaux, certainement les plus importantes et les plus « stables ».

Quelques questions spéciales méritaient également d'être examinées. La théorie des seiches transversales balayant une côte en pente douce a pu être complétée, et certains résultats appliqués à l'extrémité nord du Tanganika; celle-ci serait ainsi le siège de deux seiches au moins, l'une de 22 min. et l'autre de 15 min. approximativement, toutes deux sans nœuds longitudinaux. Les autres questions traitées sont restées purement théoriques : « seiches » sur des hauts-fonds hyperboliques et paraboliques, c'est-à-dire modification des ondes stationnaires en pleine mer au voisinage de ceux-ci; seiches dans les détroits. Nous espérons qu'aucune question importante relative aux problèmes des seiches ne nous aura échappé dans ce travail.

TABLEAU DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES.

I. — LAC DE GENÈVE.

Type de la seiche.		Période.
A. — Longitudinales .	Uninodale	{ 71,4 min (méthode de DEFANT). 71,7 à 72,8 min (formule de DU BOYS). 70,4 à 70,7 min (méthode de MILNE). 74,5 min (calculs de A. T. DOODSON). 73,5 min (observations).
	Binodale	{ 34,9 min (méthode de DEFANT). 35,5 min (observations).
B. — Transversales .	Uninodale transversale sans nœud longitudinal	{ 10,9 min (méthode de l'équation en $w(x)$ avec profondeur moyenne). 10,1 min (méthode de l'équation en $w(x)$ avec profondeur réduite).
	Uninodale transversale à un nœud longitudinal	{ 8,3 min (méthode de l'équation en $w(x)$ avec profondeur moyenne). 7,7 min (méthode de l'équation en $w(x)$ avec profondeur réduite).
	Uninodale transversale à deux nœuds longitudinaux	{ 7,5 min (méthode de l'équation en $w(x)$ avec profondeur moyenne). 7,0 min (méthode de l'équation en $w(x)$ avec profondeur réduite).
	Seiche locale de Morges-Évian (un nœud transversal) (correspond à la 1 ^{re} seiche transversale ci-dessus)	{ 10,2 min (méthode des coordonnées curvilignes). 10,3 min (observations).
	Seiche locale de Rolle-Thonon (2 nœuds transversaux)	{ 6,7 min (méthode des coordonnées curvilignes). 7,0 min (observations).

II. — LAC TANGANIKA.

N.B. — Sauf indication contraire, les périodes des seiches reprises sous A et B ont été calculées avec un contour « rectifié », et celles reprises sous C avec un contour « non rectifié ».

	Type de la seiche	Période (arrondie à la minute).	
A. — Longitudinales globales.	Uninodale	4 h 16 min (méthode de DEFANT).	
		4 h 22 min (méthode de DEFANT, contour non rectifié).	
		4 h 17 min (méthode de RITZ-HIDAKA, contour non rectifié).	
	Binodale	4 h 30 min (formule de DU BOYS).	
		4 h 13 min (méthode de l'équation de FREDHOLM).	
		4 h 30 min environ ? (observations).	
	Trinodale	2 h 18 min (méthode de DEFANT).	
		2 h 20 min (méthode de DEFANT, contour non rectifié).	
		2 h 4 min (méthode de RITZ-HIDAKA, contour non rectifié).	
		2 h 15 min environ ? (observations).	
		1 h 47 min (méthode de DEFANT).	
		1 h 51 min (méthode de DEFANT, contour non rectifié).	
		1 h 36 min (méthode de RITZ-HIDAKA, contour non rectifié).	
		1 h 40 min environ ? (observations).	
B. — Longitudinales partielles.	Golfe d'Uvira-Rumonge (extrémité nord du lac)	Uninodale 1 h 45 min (méthode de GOLDBERG).	
		Binodale 40 min (méthode de GOLDBERG).	
	Baie de Burton	Uninodale { 1 h 12 min (méthode de GOLDBERG). 1 h 28 min (méthode de GOLDBERG et correction d'embouchure). 1 h 45 min (méthode de HONDA).	
		Binodale { 27 min (méthode de GOLDBERG). 33 min (méthode de GOLDBERG et correction d'embouchure).	
	Moitié nord du lac	Uninodale (correspond à l'uninodale globale) 4 h 18 min (méthode de GOLDBERG).	
		Binodale (correspond à la trinodale globale) 2 h 2 min (méthode de GOLDBERG).	
	Moitié sud du lac	Uninodale (remarque analogue) 4 h 22 min (méthode de GOLDBERG).	
		Binodale (remarque analogue) 1 h 33 min (méthode de GOLDBERG).	
	C. — Transversales.	Bassin de Nyanza	Uninodale transversale sans nœud longitudinal { 20 min (méthode de l'équation en $w(x)$, profondeur moyenne). 18 min (méthode des coordonnées curvilignes).
			Uninodale transversale à un nœud longitudinal { 18,5 min (méthode de l'équation en $w(x)$, profondeur moyenne).
Extrémité nord (« shelf-seiches »)		Uninodale transversale sans nœud longitudinal 21 à 25 min.	
		Uninodale transversale à un nœud longitudinal 12 à 15 min.	

		Type de la seiche	Période
C. — Transversales.	Extrémité nord (« shelf-seiches »)	Binodale transversale sans nœud longitudinal	15 à 18 min.
		Binodale transversale à un nœud longitudinal	8 à 10 min.
	Bassin d'Albertville	Uninodale transversale sans nœud longitudinal	31,5 min (méthode de l'équation en $w(x)$, profondeur moyenne). 36,5 min (méthode des coordonnées curvilignes).
		Bassin de Moba	Uninodale transversale sans nœud longitudinal
	Bassin de Kala	Uninodale transversale sans nœud longitudinal	27 min (méthode de l'équation en $w(x)$, profondeur moyenne). 27 min (méthode des coordonnées curvilignes).
		Binodale transversale à un nœud longitudinal	14 min (méthode de l'équation en $w(x)$, profondeur moyenne). 18,5 min (méthode des coordonnées curvilignes).

BIBLIOGRAPHIE

A. — TRAVAUX ANCIENS (jusqu'en 1904).

- AIRY, G. B., 1845, *Tides and Waves*. (Encycl. Metropol., London, vol. V, pp. 241-396.)
- BRUYANT, 1903, *Les Seiches du lac Pavin*. (Revue d'Auvergne.)
- CAUCHY, L. A., 1815, *Sur la théorie des ondes*. (Œuvres, 1^{re} série, I, pp. 175 sqq.)
- CHOLNOKY, E., 1897, *Limnologie des Plattensees*, Wien.
- DU BOYS, P., 1891, *Sur le mouvement de balancement rythmé de l'eau des lacs (Seiches)*. (C. R. de l'Ac. des Sci. de Paris, II, 2, pp. 1202 sqq.)
- 1891, *Essai théorique sur les Seiches*. (Arch. Sc. Phys. et Natur., Genève, 25, pp. 628-652.)
- FOREL, F. A., 1873, *Première étude sur les Seiches*. (Bull. Soc. Vaudoise des Sc. Natur., 12, pp. 213 sqq.)
- 1875, *Deuxième étude sur les Seiches*. (Ibid., 13, pp. 510 sqq. et Arch. Sc. Phys. Nat. Genève, 53, pp. 281 sqq.)
- 1876, *La formule des Seiches*. (Arch. Sc. Phys. nat. Genève, 57, pp. 278 sqq.)
- 1876, *Les Seiches, vague d'oscillation des lacs*. (Actes Soc. Helvét. Sc. Nat., Andermatt, pp. 157 sqq. et Ann. Chim. Phys., 9.)
- 1878, *Seiches and Earthquakes*. (Nature, 17, pp. 281 sqq.)
- 1878, *Les Seiches des lacs et leurs causes*. (C. R. Acad. Sc. Paris, 86, pp. 1500 sqq.)
- 1878, *Les causes des Seiches*. (Arch. Sc. Phys. Nat. Genève, 63, pp. 113, 189 sqq.)
- 1879, *Les Seiches, vague d'oscillation fixe des lacs*. (Actes Soc. Helvét. Sc. Nat.)
- 1885, *La formule des Seiches*. (Arch. Sc. Phys. Nat. Genève, 14, p. 203.)
- 1891, *Note sur la formule des Seiches*. (Ibid., 25, p. 599.)
- 1893, *Die Schwankungen des Bodensees*. (Schriften des Vereins für Geschichte des Bodensees, 22, Lindau.)
- 1895, *Le Léman, Monographie limnologique*. VI^e partie : *Hydraulique*, Lausanne, Rouge, 2 vol., t. II, pp. 1-288.
- 1897, *Les Seiches des lacs et les variations locales de la pression atmosphérique*. (Arch. Sc. Phys. Nat. Genève, 4, nouv. série, pp. 39 sqq.)
- 1899, *Seiches dans les lacs*. (Verhandl. des Internat. Geographen-Kongresses, Berlin.)
- FOREL, F. A. et SONET J. L., 1880, *Les Seiches Dicotes*. (Actes Soc. Helvét. Sc. Nat., 3, pp. 15 sqq.)
- FULLEBORN, 1900, *Seiches in Nyassa Lake*. (Verhandl. Gesellsch. f. Erdkunde, 28, Berlin.)

- GAUTHIER, E., 1878, *The Seiches of the Lake of Geneva*. (Nature, 18, pp. 100 sqq.)
- GIESEN, 1877, *Versuch einer Mathem. Darstellung des Flüssigkeitswellen*. (Schles. Zeitsch. f. Math., 22, p. 133.)
- GREEN, G., 1838-1839, *On the Motion of Waves in a Variable Canal of Small Depth and Width*. (Trans. Cambr. Phil. Soc.)
- GREENHILL, 1887, *Wave-Motion in Hydrodynamics*. (Amer. Journal of Math., 9, pp. 62-112.)
- GUTHRIE, F., 1875, *On Stationary Liquid Waves*. (Proc. Phys. Soc. London, 1.)
- LAGRANGE, J. L., 1781, *Sur la théorie du mouvement des fluides*. (Nouv. Mém. Acad. Sc. et Belles-Lettres, Berlin, pp. 151-198, §§ 48 et 49.)
- LAPLACE, P. S., 1776, *Sur les Ondes. Suite de recherches sur plusieurs points du système du Monde*. (Hist. Acad. Roy. Sc. Paris.)
- MERIAN, J. R., 1828, *Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen*, Basel. [Reproduit par VONDER MÜHLL, K., Mathem. Annalen, 27 (1886), pp. 575-600.]
- PERKINS, 1894, *Seiches in Lake Michigan*. (Amer. Meteor. Journ.)
- POISSON, S. D., 1816, *Sur la théorie des ondes*. (Mém. de l'Institut.)
- SARASIN, ED., 1879, *Les seiches du Neuchâtel*. (Actes Soc. Helvét. Sc. Natur., 75, pp. 38 sqq.)
- 1891, *Remarques sur les Seiches binodales, à propos de l'Essai théorique de M. Du Boys*. (Arch. Sc. Phys. Nat. Genève, 26, pp. 81 sqq.)
- 1892, *Les Seiches du Neuchâtel*. (Ibid., 28, pp. 356 sqq.)
- 1895, *Les Seiches du lac de Thoune*. (Ibid., 34, pp. 608 sqq.)
- 1897-1901, *Les Seiches du lac des Quatre-Cantons*. (Ibid., nouv. série, 4 [1897], p. 458; 5 [1898], p. 389; 6 [1898], p. 382; 8 [1899], pp. 382, 517; 10 [1900], p. 454; 11 [1901], p. 161; 12 [1901], p. 254.)
- 1902, *Histoire de la théorie des Seiches*. (Discours d'ouverture de la 85^e Session annuelle de la Soc. Helv. Sc. Nat. Genève, 8 sept. 1902.)
- SARASIN, ED. et PASQUIN, L. DU, 1894-1895, *Les Seiches du Neuchâtel*. (Arch. Sc. Phys. Nat. Genève, 31 [1894], p. 213; 33 [1895], p. 193; et Bull. Soc. Sc. Nat. Neuchâtel, 21, p. 23.)
- VOLTERRA, V., 1898, *Sul Fenomeno delle Seiches*. (Nuovo Cimento, 8, p. 270.)
- WEBER, W. E. und E. H., 1825, *Die Wellenlehre auf Experimente Gegründet*, Leipzig.

B. — TRAVAUX MODERNES (depuis 1904).

- ARAKAWA, H., 1932, *Oscillations of Water in Spindle-Shaped and Elliptic Basins*. (Mem. Imper. Mar. Observ. Kobe, Japan, V, 2, pp. 69-84.)
- CALOI, P., 1948-1949, *Le Sesse del Lago di Garda*. (Annali di Geofisica, Roma, 1 [1948], pp. 24-48 et 175-199; 2 [1949], pp. 19-23.)
- 1948, *Sui Periodi di Oscillazione Libera del Verbano*. (Ibid., 1, pp. 376-383.)
- 1950, *Sui Possibili Modi d'Oscillazione Libera nel Lago di Bracciano*. (Ibid., 3, pp. 1-14.)
- 1951, *Oscillazione Libere del Lago di Levico*. (Ibid., 4, pp. 194-206.)

- CALOI, P. e MARCELLI, L., 1949, *Oscillazione Libere del Golfo di Napoli*. (Ibid., 2, pp. 222-242.)
- CALOI, P. e DE PANFILIS, M., 1948, *Le Sesse del Lago Maggiore*. (Ibid., 1, pp. 214-238.)
- CALOI, P., GIORGI, M., PERONACI, F. et SPADEA, M. C., 1953, *Le Sesse del Lago di Garda*. (Ibid., 6, pp. 451-466.)
- CARR, J. W., 1952, *Long Period Waves or Surges in Harbours*. (Proc. Amer. Soc. Civil Engineers, 78.)
- CHRYSTAL, G., 1904, *Some Results in the Mathematical Theory of Seiches*. (Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 25, pp. 328 sqq.)
- 1904, *Some Further Results in the Mathematical Theory of Seiches*. (Ibid., 25, pp. 637-647.)
- 1905, *On the Hydrodynamical Theory of Seiches*. (Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 41, pp. 599-649.)
- 1906 et 1908, *An Investigation of the Seiches of Loch Earn by the Scottish Lake Survey*. Parts I and II. (Ibid., 45 [1906], pp. 361-396.) Parts III-V. (Ibid., 46 [1908], pp. 455-516.)
- DEFANT, A., 1908, *Ueber die Stehenden Seespiegelschwankungen (« Seiches ») in Riva am Gardasee*. (Sitzungsber. der K. Akad. d. Wiss. Wien, Math. Natw. Klasse, 117, 2, pp. 697-780.)
- 1910, *Le Sesse del Lago di Garda*. (Nuovo Cimento, 20, pp. 35 sqq.)
- 1911, *Ueber die Periodendauer der Eigenschwingungen des Adriatischen Meeres*. (Annalen der Hydrographie, 39, pp. 119-130.)
- 1916, *Theoretische Ueberlegungen über Seespiegelschwankungen in Seen u. Meeresbuchten*. (Ibid., 44, pp. 29-34.)
- 1918, *Neue Methode zur Ermittlung der Eigenschwingungen (Seiches) von Abgeschlossenen Wassermassen (Seen, Buchten, usw.)*. (Ibid., 46, pp. 78-85.)
- 1929, *Dynamische Ozeanographie*, Berlin, Springer, pp. 177 sqq.
- DOODSON, A. T., CAREY, R. M. and BALDWIN, R., 1920, *Theoretical Determination of the Longitudinal Seiches of Lake Geneva*. (Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 52, pp. 629-642.)
- EMDEN, R., 1905, *Energiegehalt der Seiches*. (Jahrb. d. St. Gallischen Naturw. Gesellsch.)
- ENDRÖS, A., 1910, *Die Vibrationen der Seen*. (Progr. d. Königl. Gymnasiums Freising.)
- 1934, *Beobachtungen über die Dämpfung der Seiches in Seen*. (Gerlands Beiträge zur Geophysik, 41, pp. 130-148.)
- ERTEL, H., 1933, *Eine Neue Methode zur Berechnung der Eigenschwingungen von Wassermassen in Seen unregelmässiger Gestalt*. (Sitzb. Kön. Preuss. Ak. Wiss., Phys.-Math. Klasse, Berlin, 24, pp. 746-750.)
- FILIPPO, D. DI, 1949, *Le Sesse del Lago di Santa Croce*. (Ann. di Geofisica, 2, pp. 49-66.)
- 1949, *Le Sesse del Lago di Scanno*. (Ibid., 2, pp. 518-531.)
- 1951, *Le Sesse del Lago di Bolsena*. (Ibid., 4, pp. 273-286.)
- 1953, *Ulteriore Studio sulle Sesse del Lago di Bolsena*. (Ibid., 6, pp. 405-516.)
- GIORGI, M., 1948, *Studio sulle Sesse del Lago di Albano*. (Ibid., 1, pp. 410-424.)

- GOLDBERG, J., 1937, *Zur Berechnung der freien Schwingungen von Meeresbuchten*. (Ann. Hydrographie, 65, pp. 419-422.)
- GOLDBERG, J. und KEMPNI, K., 1937, *Ueber die Schwingungen der Bucht von Bakar und das allgemeine Problem des Seiches von Buchten*. (Jugoslavenska Akademija Znanosti i Umjetnosti, Zagreb.)
- GOLDSBROUGH, G. R., 1930 et 1936, *Tidal Oscillations in an Elliptic Basin of Variable Depth*. (Proc. Roy. Soc. London, 130 [1930], pp. 157 sqq.; 155 [1936], pp. 12-32.)
- GOLDSTEIN, S., 1928, *A Special Case of Tidal Motion in Elliptic Basins*. (Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. II, 1.)
- 1928, *The Free Oscillations of Water in a Canal of Elliptic Plan*. (Proc. London Math. Soc., 28, pp. 91-101.)
- GRÖBNER, W., 1951, *Oberflächenwellen von Flüssigkeiten*. (Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, ser. III, 5, pp. 175-191.)
- HALM, J. D., 1903-1904, *On a Group of Linear Differ. Equations of the 2d Order, including Prof. Chrystal's Seiche Equations*. (Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 41, pp. 651-676.)
- HARRIS, R. A., *Manual of Tides*.
- HARRIS, D. L., *Wind Tide and Seiches in the Great Lakes*. (Proc. 4th Conference on Coastal Engineering, Chicago, Ill., U.S.A.)
- HAURWITZ, B., 1951, *The Slope of Lake Surfaces under Variable Wind Stresses*. (Techn. Memor., 25, Beach Erosion Board Corps of Engineers.)
- HIDAKA, K., 1931, *Sur l'intégration de l'équation de Chrystal pour les Seiches des deux lacs écossais Earn et Treig*. (Mem. Imper. Mar. Observ., Kobe, Japan, IV, 3, pp. 227-240.)
- 1931, *Problem of Water Oscillations in Various Types of Basins and Canals*. Part I : *The Oscillations of Water in Spindle-Shaped and Elliptic Basins as well as the Associated Problems*. (Ibid., IV, 2, pp. 99-220.)
- 1931, *Id.* Part II : *The Free Oscillations of Water in a Canal of Spindle-Shaped Plan*. (Ibid., IV, 4, pp. 273-283.)
- 1931, *Id.* Part III : *Tidal Motion in a Flat Rotating Circular Sea Uniformly Shelving from the Centre to the Edge*. (Ibid., IV, 4, pp. 284-315.)
- 1932, *Id.* Part IV : *Tidal Oscillations in a Rectangular Basin of Variable Depth*. (1st Paper.) (Ibid., V, 1, pp. 15-24.)
- 1932, *Id.* Part V : *Tidal Oscillations in a Circular Basin with an Elevation or a Depression at its Centre*. (Ibid., V, 2, pp. 63-69.)
- 1932, *Id.* Part VI : *Tidal Oscillations in a Rectangular Basin of Variable Depth*. (2d Paper.) (Geophysical Magazine, V, 1, pp. 265-271.)
- 1934, *Id.* Part VII : *Oscillations of Water in a Fan-Shaped Basin*. (Ibid., VIII, 2, pp. 195-197.)
- 1935, *Id.* Part VIII : *The Oscillations of Water in Canals of Asymmetric Plan*. (Mem. Imper. Mar. Observ., V, 4, pp. 269-326.)
- 1935, *Id.* Part IX : *Seiches in a Channel*. (Ibid., V, 4, pp. 327-358.)
- 1936, *Id.* Part X : *Seiches in an Infinite Canal with an Undulatory Bed*. (Geophys. Mag., X, 1, pp. 67-70.)

- HIDAKA, K., 1937, *Id. Part XI : Tidal Oscillations in a Rectangular Basin of Variable Depth.* (3d Paper.) (Mem. Imper. Mar. Observ., VI, 3, pp. 259-277.)
- 1937, *Id. Part XII : Free Oscillations of Water in an Oval Basin.* (Ibid., VII, 1, pp. 15-19.)
- 1937, *Id. Part XIII : Free Oscillations of Water in a Basin with Smooth Boundaries.* (Geophys. Mag., XI, 2, pp. 161-165.)
- 1938, *Id. Part XIV : Free Oscillations of Water in an Elliptic Basin of Variable Depth, with Special Application to the Seiches of the Osaka-Wan.* (Ibid., XI, 3, pp. 221-236.)
- 1932, *A Practical Method of Integrating Chrystal's Seiche Equation. Theory of Uninodal Longitudinal Seiches in Lake Yamanaka.* (Ibid., V, pp. 273-291.)
- 1935, *Seiches Due to a Submarine Bank (« Bank-Seiches »).* (Mem. Imp. Mar. Observ., VI, 1, pp. 1-8.)
- 1935, *A Theory of Shelf Seiches.* (Ibid., VI, 1, pp. 9-12.)
- 1936, *Application of Ritz' Variation Method to the Determination of Seiches in a Lake.* (Ibid., VI, 2, pp. 159-173.)
- HIDAKA, K. and YASUI, M., 1948, *On the Seiches of Lake Iniwasiro.* (Geophys. Magaz., XV, pp. 45-50.)
- HONDA, K., TERADA, T., YOSHIDA, Y. and ISITANI, D., 1908, *An Investigation on the Secondary Undulations of Oceanic Tides.* (Journal of the College of Science [Imper. Univ. Tokyo], 24.)
- ICHIYE, T., 1951, *On the Oscillation of a Bay with a Narrow Mouth.* (Mem. Imper. Mar. Observ., Japan, IX, pp. 40-42.)
- 1951, *A Note on the Secondary Oscillation of a Rectangular Bay.* (Ibid., IX, pp. 25-27.)
- JEFFREYS, H., 1923, *The Free Oscillations of Water in an Elliptic Lake.* (Proc. London Math. Soc., 23, pp. 455-476.)
- 1928, *The More Rapid Longitudinal Seiches of a Narrow Lake.* (Monthly Notices Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl., 1, pp. 495-500.)
- KEULEGAN, G. H., 1951, *Hydrodynamical Evaluation of Storms on Lake Erie.* (Proc. IId Conference Coastal Engineering.)
- 1953, *Hydrodynamical Effects of Gales on Lake Erie.* (Journal Res. Nat. Bureau of Standards, 50, pp. 99-110.)
- KOENUMA, K., 1935, *On the Seiches of Lake Tôya.* (Mem. Imp. Mar. Obs., VI, 1, pp. 13-31.)
- LAMB, H., 1945, *Hydrodynamics,* New-York, Dover (6th Ed.).
- LETTAU, H., 1932, *Ueber die Perioden freier Schwingungen von unvollständig Abgeschlossenen Wassermassen (Mündungskorrektur bei Seiches).* (Gerlands Beiträge zur Geophysik, 37, pp. 1 sqq.)
- MC NOWN, J. S., 1951, *Waves and Seiches in Idealized Ports : Gravity Waves.* (Proc. Nat. Bureau of Stand., Semi-Centennial Symposium on Gravity Waves.)
- MC NOWN, J. S., WILSON, B. W. and CARR, J. H., 1952, Proc. Amer. Soc. Civil Engineers, 79.
- MAGRINI, G. P., 1905, *I Recenti Studi Sulle Sesse dei Laghi Italiani.* (Riv. Geogr. Ital., 12, p. 291.)

- MARCELLI, L., 1948, *Sesse del Lago di Lugano*. (Ann. Geofis., 1, pp. 454-475.)
- MATTEUZZI, L., 1924, *Sulla Determinazione delle Sesse forzate e delle Sesse libere mediante un' equazione integrale di Volterra*. (Rendic. Acc. Nazion. di Lincei, Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat., 33, pp. 474-480.)
- NAKAMURA, S. and HONDA, K., 1910, *Seiches in some Lakes of Japan*. (Journal of the College of Science, Imp. Univ. Tokyo, 28.)
- NAKANO, M., 1932, *Die Seiches in Gekoppeltes System formenden Buchten*. (Geophys. Magaz., V, 2, pp. 163-170.)
- 1947, *A Remark to Dr J. Goldberg's Paper « Zur Berechnung der Freien Schwingungen von Meeresbuchten »*. (Ibid., 14, pp. 87-89.)
- NEUMANN, G., 1941, *Eigenschwingungen der Ostsee*. (Archiv Deutscher Seewarte, 61, p.4.)
- 1941, *Ueber Stehende Seespiegelschwankungen (Seiches) in der Ostsee*. (Zeits. für Gesamte Erdkunde, Berlin, 5-6.)
- 1942, *Zum Problem der Eigenschwingungen Abgeschlossener Wassermassen mit bes. Berücksichtigung der Ostsee*. (Zeits. f. Math. und Naturw. Unterricht, 2.)
- 1943, *Ueber die Perioden freier Schwingungen in zwei durch einem engen Kanal miteinander verbundenen Seen*. (Ann. Hydrogr., 71, pp. 409-419.)
- 1944, *Das Schwarze Meer*. (Zeits. f. Ges. Erdkunde, Berlin, p. 92.)
- 1944, *Die Impedanz Mechanischer Schwingungssysteme und ihre Anwendung auf die Theorie der Seiches*. (Ann. Hydrogr., 72, pp. 65-79.)
- 1944, *Eine Methode zur Berechnung der Eigenperioden zusammengesetzter (gekoppelter) Seebeckensysteme*. (Ibid., 72, pp. 193-205.)
- 1944, *Freie Schwingungen der Putziger Wiek*. (Ibid., 72, p. 225.)
- 1948, *Ueber Resonanzschwingungen von Meeresbuchten und die Mündungskorrektur bei Seiches*. (Deutsche Hydrogr. Zeitschr., 1.)
- 1950, *Beiträge zur Theorie der Seiches in Zusammengesetzten Seebeckensystemen*. (Annali di Geofisica, 3, pp. 15-23.)
- 1950, *Ueber Seiches in Meeresbuchten und die Frage der Mündungskorrektur*. (Ibid., 3, p. 25-31.)
- PANNOCCHIA, G., 1948, *Sesse del Lago d'Orta*. (Ibid., 1, pp. 253-265.)
- 1951, *Sesse del Lago di Vico*. (Ibid., 4, pp. 411-418.)
- PERONACI, F., 1949, *Le Sesse del Lago di Iseo*. (Annali di Geof., 2, pp. 267-280, 406-416.)
- PROUDMAN, J., 1915, *Free and Forced Longitudinal Tidal Motion in a Lake*. (Proc. London Math. Soc., 14, pp. 240-250.)
- 1929, *The Effect on the Sea of Changes in Atmospheric Pressure*. (Supp. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 2, pp. 197-209.)
- SAKURABA, S., 1935, *Effect of Varying Depth on the Stability of Stationary Oscillations in a Lake or Sea*. (Mem. Imper. Mar. Observ. Japan, VI, 1, pp. 63-65.)
- SEN, B. M., 1927, *Waves in Canals and Basins*. (Proc. London Math. Soc., 27, pp. 363-376.)
- SPADEA, M., 1953, *Studio Preliminare sulle Oscillazioni Libere del Lago di Idro*. (Ann. Geof., 6, pp. 61-72.)

- STENIJ, S. E., 1932, *Zur Theorie der Wasserschwingungen in einem begrenzten Meeresbecken*. (Soc. Scient. Fennica Comm. Phys. Math., VI, p. 16.)
- TEGLIO, A., 1905, *Le Sesse del Lago di Garda*. (Rendic. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., 14.)
- THORADE, H., 1925, *Seiches im Schwarzen und Azowschen Meer*. (Ann. Hydrogr., 53, p. 338.)
- 1931, *Probleme der Wasserwellen*, Hamburg.
- TUBOI, I., 1936, *Free Oscillations in a Lake Having Non-Elongated and Smooth Boundaries*. (Mem. Imper. Mar. Observ. Japan, VI, pp. 227-236.)
- VANONI, V. and CARR, J. N., 1950, *Harbour Surging*. (Proc. 1st Confer. Coastal Engineering.)
- VERCELLI, F., 1909, *Le teorie idrodinamiche delle Sesse e loro applicazione al calcolo dei periodi e dei nodi delle Sesse del Bernaco*. (Mem. del R. Istituto Lomb. di Sc. e Lett., Cl. Sc. Mat. e Nat., 21 [= 12, nouv. série], pp. 1-55.)
- 1910, *Risposta alla Nota del Dott. Defant «Sulle Sesse del Lago di Garda»*. (Nuovo Cimento, 20, p. 357.)
- 1915, *Le Sesse del Verbano*. (Rendic. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett., 48, pp. 947-951.)
- WILSON, B. W., 1953, *Table Bay as an Oscillating Basin*. (Proc. Minnesota Internat. Hydraulics Convention, sept. 1-4, 1953, pp. 201-212.)
- ZEILON, N., 1913, *On the Seiches of the Gullmar Fjord*. (Ur-Svenska Hydrograf.-Biolog. Komm. Skrifter, 5.)
- 1934, *Experiments on Boundary-Tides*. (Handlinger Göteborg-Kungl. Vetens. och Vitt.-Samhälles, Foljden V, Ser. B, Bd. 3, n° 10.)
-